République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N Attribué par la bibliothèque

Année: 2015

# Analyse Multivoque et Inclusions Différentielles

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique
Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse, Géométrie et Applications

par

**Oumaameur Hassani** [1]

Sous la direction de

**Encadreur : Melle H. Abbas**

Soutenue le 11 Juin 2015 devant le jury composé de

| | | |
|---|---|---|
| **H.M. Dida** | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Président |
| **H. Abbas** | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Encadreur |
| **A. Azzouz** | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Examinateur |
| **F. Hathout** | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Examinateur |

1. oumaameur.hassani@yahoo.com

# *Dédicases*

*Je dédie ce modeste travail à :*
*Celui qui m'a indiqué la bonne voie et qui a toujours été là pour moi, dans ma vie et mes études...*

***Mon père***

*Celle qui a attendu avec patience les fruits de sa bonne éducation...*

***Ma mère***

*Mon encadreur : **Melle : Abbas Hafida** qui a su, par sa persévérance et son engagement guider mes pas tout au long de la réalisation de ce travail, seul le bon Dieu saura le récompenser. Je n'oublierai également jamais cette maitresse de la maternelle qui a pu installer et graver dans ma petite tête d'écolière l'amour de savoir et de la connaissance.*

*Mes frères, mes sœurs et mes oncles, mes tantes et leurs enfants ainsi que mes amis sont vivement remerciés pour leur soutient et pour avoir supporté mes caprices.*

*Si j'ai l'aval de dédicace cette modeste contribution je la dédierai en premier lieu à l'Université de Saida pour tout ce qu'elle a fait de moi et pour moi.*

*Je la dédie aussi à tous les membres de notre Promotion pour l'amitié et la bonne Entente qui ont fait sa particularité tout au long des cinq années de formation*

***H**assani **O**umaameur*

# *Remerciements*

*Je remercie dans le premier lieu le Dieu avoir aidé à mener jusqu'à la fin de travail,et mes parents, pour leur patience, leur financier et moral.*

*Je remercie aussi mon encadreur :* ***Melle. Abbas Hafida*** *Pour le sujet qu'elle a proposée, pour son aide et ses conseils qui ont été le guide pour mois*
*Je tiens également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont fais en acceptant de siéger à mon soutenance, tout particuliérement : Mr* ***H.M.Dida*** *pour m'avoir fais l'honneur de présider le jury de ce mémoire.*
*Je souhait exprimer notre gratitude à* ***Mr A.Azzouz*** *et* ***Mr F.Hathout*** *pour avoir accepté d'examiner ce mémoire. Je vous remercie pour l'intérêt que vous avez porté à ce travail et pour vos précieux conseils et remarques.*
*Je tiens à exprimer aussi ma reconnaissance à tous mes enseignants.*
*Et a exprimé vivement ma sincère reconnaissance à tout ceux qui je n'ai pas cités et qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.*

***H**assani **O**umaameur*

# Table des matières

# Introduction

L'analyse multivoque est une branche trés importante en mathématique qui a connus de grandes progressions dans toutes les directions à une au cours des dernières années. En effet l'analyse multivoque a été un outil de base dans touts les domaines de mathématiques appliquées. Cette branche apparait naturellement dans de nombreuses disciplines de la science, tels que la biomathématique, la physique, la théorie de controle, la théorie des jeux, les sciences économiques, et autres.

Les problèmes impliquant l'analyse multivoque surgissent, par exemple, lorsque l'ensemble de solution, n'est pas réduit à un point comme dans le cas des problèmes mal posés (resp. les problèmes d'optimisation paramétrés. Ce type de problèmes sont un phénomène trés fréquent dans les applications.

Aussi il ressort de l'étude de tels problèmes, la notion de multifonction (ou multiapplication, ou correspondance) notée $F : X \rightrightarrows Y$, qui à tout point $x$ d'un ensemble $X$ correspond un sous-ensemble $F(x)$ d'un ensemble $Y$. Il est clair que l'utilisation de ces multifonctions, ne sera satisfaisante que si on est en mesure de leur subir, en quelque sorte, les principaux outils de l'analyse. De nombreux travaux ont fait objet d'étude dans ce sens ainsi que diverses applications on été réalisées. La littérature est trés riche dans ce domaine, citon les livres de : Aubin-Cellina [14], Aubin-Frankowska [15], Burachik-Iusem [22], bien d'autres.

L'objet de ce memoire est une initiation à l'analyse multivoque. On présente les notions fondamentales de la théorie multivoque, notament la notion de régularité (i.e. la différentiabilité) des multifonctions ainsi que quelques applications.

Précisément, cette étude est exposé en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, les définitions élémentaires seront introduites. Quelques problèmes impliquant l'analyse multivoque sont décrits comme des problèmes inverses ainsi que des problèmes liés à l'optimisation. On traite dans ce chapitre les structures algébriques et les règles de calcul avec des exemples illustratifs. La notion de processus convexe fermé est aussi mise en évidence. Le chapitre est cloture par une version multivoque du théorème de l'application ouverte.

La notion de continuité au sens de Hausdorff d'une multifonction est considérée au debut du chapitre II. Les notions de semi-continuité inférieure et supérieure sont examinées. On s'intéresse aussi à la notion de différentiabilité, celle ci est trés proche de la notion classique de Fréchet-différentiabilité d'une fonction (i.e cas univoque ). Aprés avoir donner quelques exemples illustratifs, nous allons donné la version multivoque du théorème des accroissement finis, l'accent est aussi mis sur la notion de pseudo-lipschitziannité (propriété de Aubin) des multifonctions tout en précisant quelques propriétés.

La première partie du chapitre III, est dédié aux fonctions multivoques, Rappelons que le principe de contraction de Banach a été généralisé aux fonctions multivoques par Nadler en 1969. De plus, en 1978, Mizoguchi et Takahashi ont obtenu un version multivoque du théorème de Caristi. Dans la deuxième partie nous nous intéressons aux points fixes du contactions multivoques généralisées, Le point de départ est une remarque dans lequel on constate que le théorème de Nadler sur les contactions multivoques est encore vrai en affaiblissant l'hypothèse de contraction. Nous allons exposer une version améliorée leurs résultats sous une hypothèse de contraction généralisée trés faible, on obtient ainsi une version trés faible du Théorème de Banach-Picard.

Dans le chapitre IV , l'étude est consacrée aux versions du théorème d'inversion ainsi que le théorème de fonction implicite. Dans ce travail, une généralisation du théorème d'inversion [17] est donné. On donne aussi un théorème de multifonction implicite avec quelques propriétés de différentiabilité de la multifonction inverse. Ce chapitre est illustré par une application aux inclusions différentielles.

# Chapitre 1

# Outils de base

## 1.1 Préliminaires

### 1.1.1 Introduction

On se propose, dans ce chapitre, de donner un éventail de définitions algébriques et topologiques en analyse multivoque. Des divers exemples seront mis en évidence.

On parle de multifonction (ou application multivoque), cette application $F$ d'un espace $X$ vers un espace $Y$ est une correspondance qui associe à tout élément $x \in X$ un sous ensemble $F(x)$ de $Y$.On désigne une multifonction, en général, par la notation $F : X \rightrightarrows Y$ et ($F : X \to 2^{Y}$[1]). Les multifonctions interviennent dans divers problèmes, notamment, comme en économie ou en théorie des jeux, etc.
On donne ci-dessous une description de quelques exemples où cette notion apparait naturellement.

**Exemple 1.1.1.** *(Problèmes inverses) Soient $X, Y$ deux ensembles et $f : X \to Y$ une fonction. Etant donné $y \in Y$, soit le problème :*

$$\text{Trouver} \quad x \in X \quad \text{tel que} \quad f(x) = y$$

*L'ensemble des solutions n'est pas nécessairement un singleton et qui peut-être éventuellement vide. On définit ainsi une multifonction $S : Y \rightrightarrows X$ telle que :*

$$S(y) := \{x \in X : f(x) = y\} = f^{-1}(y) \quad \forall y \in Y \qquad \text{(Ensemble des solutions)}$$

1. Ensemble des parties de Y

**Exemple 1.1.2. (Problèmes d'optimisation paramétrés)**

*Soient $X, Y$ deux espaces topologiques et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$. Considérons le problème d'optimisation paramétré suivant :*

$$(P_y) \quad \inf_{x \in X} f(x,y) := V(y) \qquad \textit{(Fonction de performance)}$$

*La fonction $V$ est aussi appelée fonction valeur (ou fonction marginale).On peut définir une multifonction $S : Y \rightrightarrows X$ par :*

$$S(y) := \{x \in X : \inf_{x \in X} f(x,y) = V(y)\} \quad \forall y \in Y \qquad \textit{(Ensemble des solutions de}(P_y))$$

*Il est alors intéressant d'étudier les propriétés de $S(\cdot)$, par exemple, établir des conditions assurant que $S(y)$ soit non vide et étudier le comportement de $S(y)$ lorsque $y$ vraie.*

**Exemple 1.1.3. (Conditions d'optimalité pour le cas non différentiable)**

*Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction et $x^*$ un minimum de $f$ sur $\mathbb{R}^n$. On sait que dans le cas différentiable, la condition d'optimalité de fermat assure que $\nabla f(x^*) = 0$.*
*Une condition analogue peut-être utilisée lorsque la fonction $f$ est convexe non différentiable. En effet, on introduit une notion de sous-différentiel de $f$ en définissant la multifonction notée $\partial f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ telle que pour chaque $x$ dans $\mathbb{R}^n$ on fait correspondre le sous-ensemble :*

$$\partial f(x) := \{w \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle w, y - x \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n\}$$

*Il est alors facile de voir qu'une condition nécessaire et suffisante d'optimalité de $x^*$ est la condition $0 \in \partial f(x^*)$ d'où la nécessité d'étudier la multifonction $\partial f(\cdot)$.*

**Exemple 1.1.4. (Inéquations variationelles)**

*Les inéquations variationnelles interprètent divers phénomènes physiques et elles interviennent dans la résolution de plusieurs problèmes mathématiques. Particulièrement, elles apparaissent en théorie d'optimisation sous forme de condition d'optimalité.*
*En effet, une inéquation variationnelle est un problème de type :*

$$\begin{cases} \textit{Trouver} \quad \overline{x} \in C \quad \textit{tel qu'il existe} \quad \overline{u} \in T(\overline{x}) \quad \textit{satisfaisant} \\ \qquad \langle \overline{u}, x - \overline{x} \rangle_{X,X^*} \geq 0 \quad \forall x \in C \end{cases} \qquad \textit{(Problème variationel)}$$

*où $T$ est une fonction de $X$ dans l'ensemble des parties de $X^*$ et $C$ un fermé dans $X$. Lorsque $C$ est convexe et $T := \partial f(\cdot)$ le sous-différentiel d'une fonction convexe $f : X \to \mathbb{R}$ alors l'ensemble des solutions du problème variationel coincide avec l'ensemble des minimiseurs de $f$ sur $C$ i.e. les solutions du problèmes* $\min_{x\in C} f(x)$.

### 1.1.2 Domaine et Graphe d'une multifonction

**Définition 1.1.1.** *On appelle graphe de la multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ l'ensemble*

$$grF := \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\} \qquad \textit{(Graphe de F)}$$

*$F$ est à graphe fermé si Graphe($F$) est fermé dans $X \times Y$ on dira aussi que $F$ est fermé.*

**Définition 1.1.2.** *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction. On définit l'image de $F$ par :*

$$Im(F) := \cup_{x\in X} F(x) \qquad \textit{(Image de F)}$$

*et la projection sur $X$ (le domaine de $F$) par l'ensemble :*

$$dom(F) := \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\} \qquad \textit{(domaine de F)}$$

*Lorsque $domF \neq \emptyset$ (resp. $domF = X$), la multifonction $F$ est dite propre(resp. stricte). Et on dite que $F$ est univoque si à chaque $x$, on fait correspondre un singleton. Autrement dit, pour tout $x \in X, F(x) := \{f(x)\}$ où $f$ est une fonction de $X$ dans $Y$.*

### 1.1.3 Image réciproque d'une multifonction

Soit $X, Y$ deux ensembles et $F : X \rightrightarrows Y$ un application multivoque

**Définition 1.1.3.** *l'inverse d'une multifonction $F$ est une multifonction $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ telle que :*

$$\begin{aligned} x &\in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x) \\ (ou\ \ (y, x) &\in gr(F)^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in gr(F)) \end{aligned}$$

*Ainsi $domF^{-1} = ImF$ et $ImF^{-1} = dom(F)$.*

Donnons quelques exemples :

**Exemple 1.1.5.** *Considérons la multifonction $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par :*

$$F(x) := \begin{cases} \emptyset & si\, x > 0 \\ \{-\sqrt{-x}, \sqrt{-x}\} & si\, x \leq 0 \end{cases}$$

*Il est clair que est propre et non stricte car $domF = \mathbb{R}_-$*
*Ici*

$$ImF = \cup_{x \in \mathbb{R}_-} \{-\sqrt{-x}, \sqrt{-x}\} = \mathbb{R}$$

*et*

$$grF = \{(x, \sqrt{-x}) : x \leq 0\} \cup \{(x, -\sqrt{-x}) : x \leq 0\}$$

*De plus, la multifonction inverse est donnée par :*

$$F^{-1} : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}, F^{-1}(x) = \{-x^2\}$$

**Exemple 1.1.6.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction, on définit la multifonction $E_f : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}$ dite "d'épigraphe de $f$" par :*

$$E_f(x) = \{\alpha \in \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$$

*Alors*

$$domE_f = domf,\ grE_f = epif \quad et \quad E_f^{-1}(\alpha) = lev_{\leq \alpha} f$$

*où $epif = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x \leq \alpha)\}$ appelé épigraphe de $f$.*
*$lev_{\leq\alpha} f := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$ est l'ensemble niveau de $f$.*
*De même, on définit la multifonction $H_f : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}$ dite "d'hypographe" de $f$ par :*

$$H_f(x) := \{\alpha \in \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha\}$$

*et on'a*

$$domH_f = domf,\ grH_f = hypof \quad et \quad H_f^{-1}(\alpha) = lev_{\geq\alpha} f$$

*avec $hypof := \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha\}$ appelé hypographe de $f$ et*
*$lev_{\geq\alpha} f := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \alpha\}$.*

### 1.1.4 Image direct et image réciproque d'un sous-ensemble

L'une des différences entre les applications univoque et les applications multivoques est que pour une fonction univoque, l'inverse d'un ensemble est défini de manière unique, par contre, il existe deux manière de définir l'image inverse d'un ensemble par une multifonction.

**Définition 1.1.4.** *Soient $X, Y$ deux ensembles, $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction et $A$ un sous ensemble de $X$. L'image de $A$ par $F$ est définir par :*

$$F(A) := \cup_{x \in A} F(x)$$

**Définition 1.1.5.** *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction et $B$ un sous-ensemble de $Y$. L'image réciproque de $B$ par $F$ notée $F^{-1}(B)$ sont définir par :*

$$F^{-1}(B) := \{x \in X : F(x) \cap B \neq \emptyset\}$$

*Et le noyau de $F$ noté $F^{+}(B)$ est défini par :*

$$F^{+}(B) := \{x \in X : F(x) \subset B\}$$

**Exemple 1.1.7.** *Soit la multifonction $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ tel que $F(x) = [x^2, x^2 + 1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ on'a :*

$$\begin{aligned} F(\{0,1\}) &= \cup_{x \in \{0,1\}} F(x) = [0,2], \qquad F(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R} = F(\mathbb{R}_-) = F(\mathbb{R}) \\ F^{-1}(\mathbb{R}_+) &= \mathbb{R}, \qquad F^{-1}(\mathbb{R}_-) = \{0\}, \qquad F^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = \emptyset \end{aligned}$$

**Proposition 1.1.1.** *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction et $A, B$ deux sous-ensembles de $X, Y$ respectivement alors :*

1. $A \subset (F^{+}(F(A)))$
2. $F(F^{+}(B)) \subset B$

Donnons quelques propriétés connues dans le cas univoque .

**Propriété 1.1.1.** *Soient $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensemble de $X$ et $(B_i)_{i \in I}$ une famille des sous-ensembles de $Y$ .Alors :*

$$(\mathcal{P}_1) \quad F(\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} F(A_i) \qquad (\mathcal{P}_2) \quad F(\cap_{i \in I} A_i) \subset \cap_{i \in I} F(A_i)$$

$$(\mathcal{P}_3) \quad F^{-1}(\cup_{i \in I} B_i) = \cup_{i \in I} F^{-1}(B_i) \qquad (\mathcal{P}_4) \quad F^{-1}(\cap_{i \in I} B_i) \subset \cap_{i \in I} F^{-1}(B_i)$$

**Preuve** Donnons la preuve de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_4)$ seulement.
Soit $y \in F(\cup_{i\in I} A_i)$, il existe donc $x \in \cup_{i\in I} A_i$, pour lequel $y \in F(x)$. Ainsi pour un certain $i_0 \in I,\ x \in A_{i_0}$ et on a $y \in F(A_{i_0}) \subset \cup_{i\in I} F(A_i)$.
Réciproquement, si $y \in \cup_{i\in I} F(A_i)$ i.e. si pour un certain indice $i_0 \in I$ le point $y \in F(x)$ avec $s \in A_{i_0} \subset \cup_{i\in I} A_i$ alors on a évidemment que $y \in F(\cup_{i\in I} A_i)$.

Soit maintenant $x \in X$ telle que $F(x) \cap (\cap_{i\in I} B_i) \neq \emptyset$. Il existe donc $y \in F(x)$ de sorte que $y \in B_i$ pour tout $i \in I$ i.e. $y \in F(x) \cap B_i$ ou encore $x \in F^{-1}(B_i)$ $(\forall i \in I)$.
D'où la propriété $(\mathcal{P}_4)$.

**Remarque 1.1.1.** *Notons que l'inclusion inverse dans $(\mathcal{P}_4)$ (resp. $(\mathcal{P}_2)$) est fausse. En effet, considérons la multifonction $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par $F(x) := \emptyset$ pour tout $x \notin [-1, 3]$ et*

$$F(x) := \begin{cases} [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}] & si\ -1 \leq x < 1 \\ \mathbb{R} & si \quad 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

*et $B_1 = [0, 1], B_2 = [4, 6]$. Alors $F^{-1}(B_1 \cap B_2) = \emptyset$ et $F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = [1, 3]$.*
□

# 1.2 Quelques opérateur sur les multifonction

## 1.2.1 Opérateurs algébriques

Considérons $X, Y$ deux ensembles et $F, G : X \rightrightarrows Y$ deux multifonction. On peut alors définir divers multifonctions en considérant :

- $H = F \cup G : X \rightrightarrows Y$ telle que $H(x) = F(x) \cup G(x) \quad \forall x \in X$
- $H = F \cap G : X \rightrightarrows Y$ telle que $H(x) = F(x) \cap G(x) \quad \forall x \in X$
- $H = F \backslash G : X \rightrightarrows Y$ telle que $H(x) = F(x) \backslash G(x) \quad \forall x \in X$
- $H = (F, G) : X \rightrightarrows Y$ telle que $H(x) = F(x) \times G(x) \quad \forall x \in X$

Et lorsque $X, Y$ sont des espace vectoriels, on définit les opérations suivantes :

- $H = F \pm G : X \rightrightarrows Y$ telle que $H(x) = F(x) \pm G(x) = \{y_1 \pm y_2 : y_1 \in F(x)$ et $y_2 \in G(x)\} \quad \forall x \in X$
- $H = \lambda F : X \rightrightarrows Y$ telle que $H(x) = \lambda F(x) = \{\lambda y : y \in F(x)\} \quad \forall x \in X$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

Donnons un exemple illustratif :

**Exemple 1.2.1.** *Soient* $F_1, F_2 : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *telle que :*
$F_1(x) := [x-1, x+2]$ *et*
$F_2(x) := [x, x+2]$. *On'a :*

$$\begin{array}{rcl} (F_1 \cup F_2)(x) & = & [x-1, x+1] \cup [x, x+2] = [x-1, x+2] \\ (F_1 \cap F_2)(x) & = & [x-1, x+1] \cap [x, x+2] = [x, x+1] \\ (F_1 \backslash F_2)(x) & = & [x-1, x+1] \setminus [x, x+2] = [x-1, x] \\ (F_1, F_2)(x) & = & [x-1, x+1] \times [x, x+2] \end{array}$$

### 1.2.2 Composée des multifonctions

**Définition 1.2.1.** *Si* $F : X \rightrightarrows Y$ *et* $G : Y \rightrightarrows Z$ *sont des multifonctions, alors la composition* $(G \circ F)(\cdot)$ *est définir par :*

$$(G \circ F)(x) := G(F(x)) = \cup_{y \in F(x)} G(y) \quad \forall x \in X$$

*Bien sur cette opération n'est pas commutative. En effet, considérons l'exemple suivant :*

**Exemple 1.2.2.** *Soient* $F, G : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *sont des multifonctions telles que :*
$F(x) := \{x^2, x^2+1\}$ *et* $G(x) := \{\sqrt{|x|}, \sqrt{|x+1|}\}$. *On'a :*

$$\begin{array}{rcl} (G \circ F)(x) & = & G(F(x)) = \cup_{y \in F(x)} G(y) = G(x^2) \cup G(x^{2+1}) \\ & = & \{|x|, |x|+1, \sqrt{|x^2+1|}, \sqrt{|x^2+1|}+1\} \end{array}$$

*D'autre part,*

$$\begin{array}{rcl} (F \circ G)(x) & = & F(G(x)) = \cup_{y \in G(x)} F(y) = F(\sqrt{|x|)} \cup F(\sqrt{|x|}+1) \\ & = & \{|x|, |x|+1, (\sqrt{|x|}+1)^2, (\sqrt{|x|}+1)^2+1\} \end{array}$$

*et pour* $x = 1$, *on'a :*

$$(G \circ F)(1) = \{1, 2, \sqrt{2}, \sqrt{2}+1\} \neq (F \circ G)(1) = \{1, 2, 4, 5\}$$

### 1.2.3 Propriétés principales :

**Proposition 1.2.1.** *Soit $F, G : X \rightrightarrows Y$ deux multifonctions, et $B$ un sous ensemble de $Y$. Alors :*

**1)** $(F \cup G)^{-1}(B) = F^{-1}(B) \cup G^{-1}(B)$ *et* $(F \cup G)^{+} = F^{-1}(B) \cup G^{+}(B)$

**2)** $(F \cap G)^{-1}(B) \subseteq F^{-1}(B) \cap G^{-1}(B)$ *et* $F^{-1}(B) \cap G^{+}(B) \subseteq (F \cap G)^{+}(B)$

**Proposition 1.2.2.** *Soient $F : X \rightrightarrows Y$ et $G : Y \rightrightarrows Z$ deux multifonction et $B \subseteq Y$. Alors :*

**1)** $(G \circ F)^{-1}(B) = F^{-1}(G^{-1}(A))$ *et* $(G \circ F)^{+}(B) = F^{+}(G^{+}(A))$

**2)** *Si de plus $C \subset Z$. Alors :*

$$(F \times G)^{+}(B \times C) = F^{+}(B) \cap G^{+}(C) \quad \textit{et} \quad (F \times G)^{-1}(B \times C) = F^{-1}(B) \cap G^{-1}(C)$$

### 1.2.4 Processus convexes fermés :

Considérons maintenant deux espaces vectoriels $X, Y$ et introduisons la notion de convexité d'une multifonction par :

**Définition 1.2.2.** *Une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ est dite :*

**1)** *à valeurs convexes (resp. fermées) si $F(x)$ est convexe (resp. fermé) pour tout $x \in X$.*

**2)** *convexe si son graphe ($grF$) est convexe (resp. fermé) dans $X \times Y$. Autrement dit, $F$ convexe si $domF$ est pour tous $x_1, x_2 \in domF$ et $\lambda \in [0, 1]$ on'a :*

$$(1 - \lambda)F(x_1) + \lambda F(x_2) \subset F((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2)$$

**3)** *fermé si $grF$ est fermé dans $X \times Y$. Autrement dit, lorsque $X$ et $Y$ sont des espaces métriques, $F$ est fermée si pour toute suite $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers $(x, y)$ telle que $y_n \in Fx_n$ on'a $y \in F(x)$.*

**Remarque 1.2.1.** *Une multifonction convexe (resp. fermée) est nécessairement à valeurs convexes (resp. fermées) mais la réciproque est fausse, il suffit de considérer la multifonction univoque $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ telle que : $F(x) := \{x^3\}$(resp. $F(x) := \{\sin \frac{1}{x}\}$) pour $x \neq 0$.*

**Exemple 1.2.3.** *Soient $g : X \to Y$ une fonction linéaire et $K$ un sous-ensemble convexe de $Y$. On considère la multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ définie par $F(x) = g(x) + K$. Alors il est facile de montrer que $F$ est convexe.*
*En effet, soient $(x_1, y_1) \in grF$, $(x_2, y_2) \in grF$ et $\lambda \in [0, 1]$. On'a donc*

$$\begin{aligned}(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 &\in (1-\lambda)(g(x_1) + K) + \lambda(g(x_2) + K)\\ &\in (1-\lambda)g(x_1) + \lambda g(x_2) + (1-\lambda)K + \lambda K\\ &\in g((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) + K\end{aligned}$$

*car $g$ est linéaire et $K$ convexe. D'où $F$ est convexe.*

**Définition 1.2.3.** *On dit que la multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ est affine si pour tout $x_1, x_2 \in domF$ et $\lambda \in [0, 1]$*

$$(1-\lambda)F(x_1) + \lambda F(x_2) = F((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)$$

Comme exemple de multifonction affine, on donne :

**Exemple 1.2.4.** *Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonction affines et concidérons la multifonction $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par :*

$$F(x) = \begin{cases} [f(x), g(x)] & si\, f(x) \leq g(x)\\ \emptyset & sinon\end{cases}$$

*Comme $f, g$ sont affines alors $domF$ est convexe avec*

$$domF = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \neq \emptyset\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq g(x)\} \neq \emptyset$$

*De plus, pour $x_1, x_2 \in domF$ et $\lambda \in [0, 1]$ on'a :*

$$\begin{aligned}y &\in F((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \Leftrightarrow f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq y \leq g((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)\\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \leq y \leq (1-\lambda)g(x_1) + \lambda g(x_2)\\ &\Leftrightarrow y \in (1-\lambda)[f(x_1), g(x_1)] + \lambda[f(x_2), g(x_2)]\\ &\Leftrightarrow y \in (1-\lambda)F(x_1) + \lambda F(x_2)\end{aligned}$$

*D'où la multifonction $F$ est affine.*

**Notion de processus convexe fermée**

**Définition 1.2.4.** *Soit $X, Y$ deux espace vectoriel et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction. On dit que $F$ est un processus si son graphe est un cône i.e. $grF$ satisfait la propriété suivante :*

$$\lambda grF \subset grF \qquad \forall \lambda \geq 0$$

*Si de plus, $grF$ est convexe (resp. s.e.v) on dit que $F$ est un processus convexe (resp. linéaire).*

**Définition 1.2.5.** *Soient $X$ et $Y$ deux espace vectoriel topologiques (en particulier e.v.n) et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction. On dit que $F$ est un processus convexe fermé si son graphe $grF$ est un cône convexe fermé.*

**Exemple 1.2.5.** *Soient $X$ et $Y$ deux e.v.n $A : X \to Y$ un opérateur linéaire continu et $K$ un cône convexe fermé dans $Y$. Alors la multifonction $F$ définie par $F(x) = A(x) + K$ est un processus convexe fermé. En effet, D'après l'exemple* 1.2.3*, la multifonction $F$ est convexe i.e. son graphe est convexe.*
*Soient maintenant $(x, y) \in grF$ et $\lambda \geq 0$. On'a donc :*

$$\lambda y \in \lambda A(x) + \lambda K = A(\lambda x) + \lambda K \subset A(\lambda x) + K$$

*car $K$ est un cône. Ainsi $\lambda(x, y) \in grF$ D'où $F$ est un processus.*
*D'autre part, soit une suite $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset grF$ telle que $(x_n, y_n) \to_{n\to\infty} (x, y)$. Comme l'opérateur $A$ est un continu et la suite $X_n$ converge vers $x$ alors $A(x_n) \to_{n\to\infty} Ax$. D'où $(y_n - A(x_n))$ est une suite d'élément de $K$ et converge vers $y - Ax$ alors $y - Ax \in \overline{K} = K$ ($K$ fermé) ce qui montre que $F$ est fermé. On conclut que $F$ est un processus convexe fermé.*

**Une propriété caractérisant les processus :**

**Propriété 1.2.1.** *Tout processus est caractérisé la propriété suivante :*

$$\forall x \in X, \forall \lambda > 0 : \lambda F(x) = F(\lambda x) \quad et \quad 0 \in F(0)$$

**Preuve.** Soient $x \in X, \lambda > 0$ et prenons $y \in \lambda F(x)$. D'où $\lambda^{-1}y \in F(x)$ ainsi $\lambda^{-1}(\lambda x, y) = (x, \lambda^{-1}y) \in grF$ ou enco re $(\lambda x, y) \in \lambda grF \subset grF$ car $F$ est un processus. On conclut que $y \in F(\lambda x)$.
Si maintenant $y \in F(\lambda x)$ i.e $(\lambda x, y) \in grF$ d'où $(x, \lambda^{-1}y) \in \lambda^{-1}grF \subset grF$. On'a donc $\lambda^{-1}y \in F(x)$ i.e $y \in \lambda F(x)$. □

**Remarque 1.2.2.** *Le domaine et l'image d'un processus convexe sont des cône convexes. En effet, soit $F : X \rightrightarrows Y$ un processus convexe. On sait que $domF$ (resp. $ImF$) est convexe. Considérons $x \in domF$ i.e. $F(x) \neq \emptyset$. Donc $\lambda F(x) \neq \emptyset$ pour tout scalaire $\lambda$. Et comme $F$ est un processus, $\lambda F(x) = F(\lambda x)$ $\forall \lambda > 0$ avec $0 \in F(0)$. D'où $domF$ est un cône. De la même manière, on montre que $ImF$ est un cône.*

Une caractérisation des processus convexes peut-être donnée par le :

**Lemme 1.2.1.** *Une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ est un processus convexe si et seulement si $F$ est un processus vérifiant :*

$$\forall x_1, x_2 \in X : F(x_1) + F(x_2) \subset F(x_1 + x_2)$$

**Preuve.** Il suffit de montrer que lorsque $K$ est un cône alors il est convexe si et seulement si $K + K \subset K$. En effet, soient $x, y \in K$. Supposons $K$ convexe alors $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in K$ et comme $K$ est un cône on'a :

$$x + y = 2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \in 2K \subset K$$

Réciproquement, si $x, y \in K$ donc pour tout $t \in [0, 1]$ on'a $tx \in K$ et $(1 - t)y \in K$.
D'où $tx + (1 - t)y \in K + K \subset K$. □

**Proposition 1.2.3.** *Soient $X, Y, Z$ des e.v.n $F, G : X \rightrightarrows Y$ et $H : Y \rightrightarrows Z$ des processus convexe fermés. Alors :*

**1)** *Les multifonctions $F^{-1}, \lambda F(\lambda \in \mathbb{R}), F \cap G, F \cup G$ et $(F, G)$ sont des processus convexes fermés.*

**2)** *Les multifonctions $F + G, H \circ F$ sont des processus convexes.*

**Preuve.** On va donner la preuve par l'inverse et la composition.

**1)** Comme le graphe de la multifonction inverse $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ est caractérisé par l'équivalence

$$(y, x) \in grF^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in grF$$

il est facile de montrer que $F^{-1}$ est un processus convexe fermé.

**2)** Vérifions que $gr(H \circ F)$ est un cône.

Soient $(x, z) \in gr(H \circ F)$ et $\lambda > 0$. D'où $z \in Hy$ avec $y \in Fx$ et comme $H, F$ sont des processus, on'a $\lambda z \in \lambda Hy = H(\lambda y)$ avec $\lambda y \in \lambda Fx = F(\lambda x)$. Ainsi $\lambda z \in H \circ F(\lambda x)$ i.e. $\lambda(x, z) \in gr(H \circ F)$.

Considérons maintenant $z_i \in H(y_i)$ avec $y_i \in F(x_i)$ et $x_i \in X(i = 1, 2)$, par la convexité de $H$(resp. $F$), on'a :

$$z_1 + z_2 \in Hy_1 + Hy_2 \subset H(y_1 + y_2)$$

avec

$$y_1 + y_2 \in F(x_1) + F(x_2) \subset F(x_1 + x_2)$$

D'où $z_1 + z_2 \in (H \circ F)(x_1 + x_2)$ et la convexité de $H \circ F$ s'en suit. $\square$

**Remarque 1.2.3.** • *La somme de deux multifonction fermées n'est pas nécessairement une multifonction fermée. En effet, considérons* $F$, $G : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *telle que* $F(x) := \{\frac{1}{x}\}$ *pour* $x \neq 0, F(0) = \{0\}$ *et* $G(x) := \{x - \frac{1}{x}\}$ *si* $x \neq 0$ *avec* $G(0) = [1, +\infty[$.
*Ici* $F$ *et* $G$ *sont fermée alors que* $F+G$ *ne l'est pas. Pour cela, il suffit de considérer la suite* $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ *dans* $gr(F + G)(\frac{1}{n} \in (F + G)(\frac{1}{n}))$ *convergente vers* $(0, 0)$ *mais* $(0, 0) \notin gr(F + G)$ *car* $(F + G)(0) = [1, +\infty[$.
• *La composée de deux multifonction fermées n'est pas nécessairement une multifonction fermée. En effet, pronons* $F$, $G : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *telle que* $F(x) := \{\frac{1}{x}\}$ *pour* $x \neq 0, F(0) = \{0\}$ *et* $G(x) := [1, x]$ *pour tout* $x \geq 1$ *et* $G(x) := \emptyset$ *pour* $x < 1$. *Ici* $F$, $G$ *sont fermée mais la composée* $G \circ F$ *n'est pas fermée avec* $G \circ F(x) := [1, \frac{1}{x}]$ *si* $0 < x \leq 1$ *et* $G \circ F(x) := \emptyset$ *si* $x \in ] - \infty, 0] \cup ]1, +\infty]$. *Il suffit de prendre la suite* $(\frac{1}{n}, 1) \subset gr(G \circ F)$ *et* $lim(\dfrac{1}{n}, 1) = (0, 1) \notin gr(G \circ F)$.

Notons que la notion de processus convexe fermée généralise la notion d'opérateur linéaire borné. De plus, une manière de définir la norme d'un processus convexe $F$ est donnée dans [15] par :

$$\|F\| := \sup_{x \in domF, x \neq 0} \frac{d(0, F(x))}{\|x\|}$$

Un processus convexe est alors dit normé si sa norme est finie.

**Remarque 1.2.4.** *Comme dans le cas univoque, si $F$ est de norme finie, on ne peut rien dire sur la norme de $F^{-1}$. En effet, soit l'exemple suivant :*

**Exemple 1.2.6.** *Soit $F$ une multifonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $F(x) := \emptyset$ pour $x < 0$ et*

$$F(x) := \{(y, z) : y^2 \leq zx \, et \, z \geq 0\} \quad pour \, x \geq 0$$

*Ici $0 \in F(x)$ pour tout $x \in domF = \mathbb{R}^+$ donc $d(0, F(x)) = 0$. D'où $\| F \| = 0$ et $F$ est normé.*
*La multifonction inverse de $F$ est définie par $F^{-1}(0, 0) = \mathbb{R}^+, F^{-1}(y, z) := \emptyset$ si $(y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_- \cup \mathbb{R}^* \times \{0\}$ et*

$$F^{-1}(y, z) := \{x \in \mathbb{R}^+ : x \geq \frac{y^2}{z}\} \quad si \, z > 0$$

*de plus sa norme est infinie : pour la suite $(1, \frac{1}{n}) \subset domF^{-1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, on'a :*
*$F^{-1}(1, \frac{1}{n}) = [n, +\infty[$. Donc $d(0, [n, +\infty[) = n$ et*

$$\|F^{-1}\| \geq \frac{d(0, F^{-1}(1, \frac{1}{n}))}{\|(1, \frac{1}{n})\|} = \frac{n}{\max(1, \frac{1}{n})} = n \to +\infty.$$

Finalement, on énonce la première version multivoque du théorème de l'application ouverte. Cette version a été obtenue dans un premier temps pour les processus convexes fermés puis généralisée pour d'autre cas

**Théorème 1.2.1.** ([22], [15]) *Soient $X, Y$ des espaces de Banach et $F : X \rightrightarrows Y$ un processus convexe fermé et surjectif i.e. $ImF = Y$. Alors $F$ est ouvert i.e. pour tout ouvert $U$ dans $F(U)$ est un ouvert dans $Y$. De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $y_1, y_2 \in Y$ et tout $x_1 \in F^{-1}(y_1)$, il existe $x_2 \in F^{-1}(y_2)$ de sorte que*

$$\|x_1 - x_2\| \leq c\|y_1 - y_2\|$$

# Chapitre 2

# Notion de lipchitziannité et de différentiabilité

## 2.1 Continuité au sens de Hausdorff

### 2.1.1 Distance de Pompieu-Hausdorff

Pour définir la continuité au sens de Hausdorff, on'a besoin d'introduire la notion d'excès que de distance de Pompieu-Hosdorff. Pour cela, considérons un espace métrique $(X, d)$.

**Définition 2.1.1.** *Soient $A, B$ deux parties de $X$, on définit l'excès de $A$ sur $B$, et on note $e(A, B)$, comme suite :*

$$\begin{aligned} e(A,B) &:= \sup_{x\in A} d(x,B) = \sup_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x,y) \quad si \quad A \neq \emptyset \\ e(\emptyset, B) &:= 0 \end{aligned}$$

*où $d(x, B) = \inf_{y\in B} d(x, y)$ avec la convention $\inf_{\emptyset} = +\infty$.*

**Exemple 2.1.1.** *Pour $A = [0, 1]$ et $B = [0, +\infty]$, on'a $e(A, B) = 0, e(B, A) = +\infty$,*
*Et pour les parties : $A = [1, +\infty[$ et $B = \mathbb{N}^*$, on obtiens $e(B, A) = 0$ et pour tout $x \geq 1, d(x, B) = \min(x - [x], [x] - x + 1)$ où $[x]$ désigne la partie entière de $x$. Ainsi $e(A, B) = \frac{1}{2}$.*

**Remarque 2.1.1.** *On fait que l'excès n'est pas symétrique et n'est pas nécessairement fini donc il ne vérifie pas les propriétés élémentaires d'une métrique. Citons quelque propriété de l'excès.*

**Propriété 2.1.1.** *Soient $A, B, C, D$ des partie non vides d'un espace métrique $X$, on'a :*

($\mathcal{P}_1$) $e(A,B) \leq e(A,C) + e(C,B)$

($\mathcal{P}_2$) $e(A,B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ *et* $e(A,B) = e(\overline{A},\overline{B})$

($\mathcal{P}_3$) *si* $A \subset C$ *et* $D \subset B$ *alors* $e(A,B) \leq e(C,D)$

*Lorsque $X$ est un espace vectoriel normé et soit $\lambda \in [0,1]$, on'a :*

($\mathcal{P}_4$) $e(A+C, B+D) \leq e(A,B) + e(C,D)$

($\mathcal{P}_5$) $e(A, \lambda B + (1-\lambda)C) \leq \lambda e(A,B) + (1-\lambda)e(A,C)$

($\mathcal{P}_6$) *Si $C$ est convexe alors* $e(\lambda A + (1-\lambda)B, C) \leq \lambda e(A,C) + (1-\lambda)e(B,C)$

**Preuve.** Donnons la preuve de $(\mathcal{P}_1), (\mathcal{P}_2)$ et de $(\mathcal{P}_6)$.
Montrons tout d'abord la relation suivante :

$$d(x,B) \leq d(x,y) + d(y,B) \quad \forall x,y \in X \tag{2.1.1}$$

En effet, soient $x, y \in X$, d'après l'inégalité triangulaire, il vient que :

$$\begin{aligned} d(x,B) &\leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \qquad \forall z \in B \\ &\leq d(x,y) + \inf_{z\in B} d(y,z) \end{aligned}$$

et la propriété (2.1.1) s'en suit et donc pour tous $x \in A$ et $y \in C$

$$d(x,B) \leq d(x,y) + d(y,B) \in d(x,y) + e(C,B)$$

En prenant alors la borne inférieure sur les $y$ dans $C$, il vient (pour $x$ quelconque) :

$$d(x,B) \leq d(x,C) + e(C,B) \tag{2.1.2}$$

D'où $(\mathcal{P}_1)$ le résultat en prenant la borne supérieure sur les $x$ dans $A$. Maintenant, en utilisant l'inégalité (2.1.2) et la propriété classique donnée par l'équivalence :

$$d(x,B) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{B}$$

on montre sans aucune difficulté le premier résultat dans $(\mathcal{P}_2)$.
De plus, comme $\sup_A = \sup_{\overline{A}}$ (resp. $\inf_B = \inf_{\overline{B}}$), on conclut que : $e(A,B) = e(\overline{A},\overline{B})$.

Considérons maintenant, $C$ un convexe dans $X$ un e.v.n et $\lambda \in [0,1]$.
Soient $x \in A, y \in B$ alors :

$$\begin{array}{rcl} d(\lambda x + (1-\lambda)y, C) & \leq & d(\lambda x + (1-\lambda)y, z) \qquad \forall z \in C \\ & \leq & d(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda u + (1-\lambda)v) \qquad \forall u, v \in C \\ & \leq & \lambda\|x-u\| + (1-\lambda)\|y-v\| \qquad \forall u, v \in C \end{array}$$

Passant à la borne inférieure, il vient que :

$$\begin{array}{rcl} d(\lambda x + (1-\lambda)y, C) & \leq & \lambda d(x, C) + (1-\lambda)d(y, C) \\ & \leq & \lambda e(A, C) + (1-\lambda)e(B, C) \end{array}$$

d'où $(\mathcal{P}_6)$ en prenant la borne supérieure. □

**Définition 2.1.2. (Distante de Pompieu-Hausdorff)**

*La distance de Pompieu-Hausdorff (dite de Hausdorff) entre deux parties $A$ et $B$ de $(X, d)$ est définie par :*

$$d_H(A, B) := \max(e(A, B), e(B, A))$$

*Il est clair que $d_H$ définie une métrique sur l'ensemble des parties fermées bornées et non vides de $X$.*

**Remarque 2.1.2.** *D'après cette définition, on peut facilement vérifier les propriétés suivantes :*

**1)** $d_H(A, A) = 0$ *pour tout* $A \in X$

**2)** $d_H(A, B) = d_H(B, A)$ *pour tout* $A, B \in X$

**3)** $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$ *pour tout* $A, B, C \in X$

### 2.1.2 Semi-continuité au sens de Hausdorff

On s'intéresse, dans ce paragraphe, à la notion de continuité au sens de Hausdorff. Plus particulièrement, la semi-continuité inférieure (resp. supérieure) seront abordées tout en donnant quelques propriétés importantes. Notons qu'on trouve diverse notions de continuité de multifonctions dans la littérature, on pourra consulter [22] pour plus de détail.
Soient $X$ et $Y$ deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction à valeurs non vides.

**Définition 2.1.3.** *On dira que $F$ est :*

**1)** *Semi-continue inférierement (s.c.i) en $X_0 \in domF$ si $e(F(x_0), F(x)) \to_{x \to x_0} 0$*

**2)** *Semi-continue supérierement (s.c.s) en $X_0 \in domF$ si $e(F(x), F(x_0)) \to_{x \to x_0} 0$*

**3)** *Continue au sens de Hausdorff en $X_0 \in domF$ si $d_H(F(x), F(x_0)) \to_{x \to x_0} 0$ autrement dit, si elle est s.c.i et s.c.s en $x_0$.*

Donnons quelques exemples :

**Exemple 2.1.2.** *Soit $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par :*

$$F(x) = \begin{cases} \{\frac{x}{|x|}\} & si\ x \neq 0 \\ [-1, +1] & si\ x = 0 \end{cases}$$

*Cette multifonction est s.c.i (resp. s.c.s) en tout $s_0 \neq 0$.*
*En effet, si $x_0 > 0$ alors pour tout $x$ voisin de $x_0$ on a $F(x) = F(x_0) = \{1\}$. D'où $e(F(x_0), F(x)) = e(F(x), F(x_0)) = 0$.*
*De même, si $x_0 < 0$ on a $F(x) = F(x_0) = \{-1\}$ pour $x$ proche de $x_0$ Donc $F$ est continue en $X_0 \neq 0$. Ici $F$ est s.c.s en $0$ mais elle n'est pas s.c.i .*
*En effet, comme $F(x) \subset F(0)$ alors $e(F(x), F(0)) \to_{x \to 0} 0$. Mais pour $y_0 = 0 \in F(0), d(0, F(x)) = 1$ pour tout $x \neq 0$ donc $e(F(0), F(x)) \nrightarrow_{x \to 0} 0$.*

**Exemple 2.1.3.** *La multifonction $F : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \begin{cases} [0, \frac{1}{x}] & si\ x > 0 \\ \{0\} & si\ x = 0 \end{cases}$$

*est s.c.i et s.c.s en $0$.*
*En effet, on'a $e(F(0), F(x)) = d(0, [0, \frac{1}{x}]) = 0$ et $e(F(x), F(0)) = \frac{1}{x} \to +\infty$.*

Une variante de la semi-continuité inférieure peut-être donnée comme suit :

**Définition 2.1.4.** *Une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ est dite s.c.i en $(x_0, y_0) \in grF$ si $d(y_0, F(x)) \to_{x \to x_0} 0$, Autrement dit, si pour toute suite $(x_n)$ convergeant vers $x_0$, il existe une suite $(y_n)$ convergeant vers $y_0$ et telle que $y_n \in f(x_n)$, et on dira que $F$ est s.c.i en $x_0$ si $\forall y_0 \in F(x_0) : d(y_0, F(x)) \to_{x \to x_0} 0$.*

**Remarque 2.1.3.** *Les propriétés de semi-continuité sur les opérations (comme par exemple, somme, composition, réunion) sont nombreuses et très variées (voir* [23]*). On fait remarquer que si une multifonction $F$ est s.c.i (resp. s.c.s), on ne peut rien dire sur la multifonction inverse $F^{-1}$. On a en fait un résultat semblable au cas univoque disant que si $f : X \to Y$ est ouverte (resp. fermée) et bijective alors $f^{-1}$ est continue.*

Introduisons alors la notion de multifonction ouvret par la définition suivante :

**Définition 2.1.5.** *Soient $X, Y$ deux espaces métrique, $F : X \rightrightarrows Y$ à valeur non vides et $(x_0, y_0) \in grF$. On dit que $F$ est ouverte en $(x_0, y_0)$ si pour tout ouvert $U$ contenant $x_0$, il existe un voisinage $V$ de $y_0$ tel que $V \subset F(U)$.*

Notons que cette définition est aussi valable dans des espaces topologique.
La proposition suivante assure que lorsque la multifonction est ouverts alors son inverse est semi-continue inférieurement. En effet, considérons $X, Y$ deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ un multifonction à valeurs non vides, on'a alors la :

**Proposition 2.1.1.** *Si $F$ est ouverte en $(x_0, y_0) \in grF$ alors $F^{-1}$ est s.c.i en $(y_0, x_0)$.*

**Preuve.** Il s'agit de montrer que $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ vérifie la définition (2.1.4) au point $(y_0, x_0) \in grF^{-1}$. Soit $\varepsilon > 0$ et considérons $U := B(x_0, \varepsilon)$ qui est un voisinage ouvert de $x_0$. Comme $F$ est ouverte en $(x_0, y_0)$, on peut trouver un voisinage $V$ de $y_0$ de sorte que $V \subset F(U)$.
autrement dit, pour tout $y \in V$, il existe au moins un $x \in U$ tel que $y \in F(x)$ d'où $x \in F^{-1}(y)$. Par conséquent,

$$d(x_0, F^{-1}(y)) \leq d(x_0, x) < \varepsilon \quad \forall y \in V$$

On conclut que $F^{-1}$ est s.c.i. en $(y_0, x_0)$. $\square$

## 2.2 Notions de différentiabilité

### 2.2.1 Introduction

La différentiabilité des multifonction a fait l'objet de plusieurs travaux et la littérature est assez riche dans ce domaine. on cite, par exemple, les travaux de Banks-Jacobs[16],Gautier[28], Azé-Chou[11], Aubin-Frankowska[15], Mordukhovich[9], levy-Rock afellar[5].

Diverses notion de différentiabilité de multifonction ont été donc introduisant à des résultats variés et complémentaires en analyse multivoque, notamment, des résultats concernant l'inversion des multifonctions, le théorème des multifonctions implicites et le régularité métrique.
Introduisons brièvement quelques unes de ces notions.

Soient $X, Y$ des e.v.n, $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction à valeur non vides.

- **Différentiabilité au sens de Bouligrand :**
La multifonction $F$ est dite B-différentiable en $x_0 \in X$ si pour toute direction $d$ la limite suivante existe

$$\lim_{t\downarrow 0, v\to d} \frac{d_H(F(x_0+tv), F(x_0))}{t} := F'(x_0, d)$$

- **Différentiabilité au sens de Gautier :**
La multifonction $F$ est dite différentiable en $x_0 \in X$ s'il existe une multifonction $A : X \rightrightarrows Y$ affine tel que

$$F(x) = A(x) + o(\|x - x_0\|)$$

.

- **Différentiabilité au sens de Azé-Chou :**
La multifonction $F$ est dite B-différentiable en $(x_0, y_0) \in grF$ s'il existe une multifonction $L : X \rightrightarrows Y$ tel que $grL$ est un cône fermé et

$$\lim_{((x,y),(u,v)) \overset{grF\times grL}{\longrightarrow} ((x_0,y_0),(0,0))} \|(u,v)\|^{-1} d((x+u, y+v), grF) = 0$$

.

• **Dérivée contingente (Aubin-Frankowska) :**

La dérivée contingente de $F$ en $(x_0, y_0) \in grF$ est la multifonction $DF(x_0, y_0) : X \rightrightarrows Y$ définie par :

$$v \in DF(x_0, y_0)(u) \Longleftrightarrow \lim_{t\to 0^+} \inf_{w\to u} d(v, \frac{F(x_0 + tw) - y_0}{t}) = 0$$

Autrement dit, $grDF(x_0, y_0) = T_{grF}(x_0, y_0)$ (le cône tangente à $grF$ en $(x_0, y_0)$) d'où

$$v \in DF(x_0, y_0)(u) \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists (t_n) \downarrow 0, \exists (u_n) \to u, \exists (v_n) \to v & \text{tels que} \\ \quad y_0 + t_n v_n \in F(x_0 + t_n u_n) \quad \forall n \end{cases}$$

• **Codérivation (Mordukhovich) :**

La codérivée contingente de $F$ en $(x_0, y_0) \in grF$ est la multifonction $D^*F(x_0, y_0) : y^* \rightrightarrows x^*$ définie par :

$$x^* \in D^*F(x_0, y_0)(y^*) \Longleftrightarrow (x^*, -y^*) \in N_{grF}(x_0, y_0)$$

où $N_{grF}(x_0, y_0)$ est un cône normal à $grF$ en $(x_0, y_0)$.

D'autre notion ont été donnée ainsi que des comparaisons ont été faites dans diverse études. On pourra consulter les travaux de Levy-Rockafellar [5], Mordhovich ([8, 6, 7, 9]), Ponot [29] où on trouvera aussi des règle de calcul et des applications. Pour notre part, on va considérer et étudier la notion de différentiabilité donnée dans [17].

### 2.2.2 Différentiabilité en un point du domaine

On va présente, dans cette section , la notion de différentiabilité introduite dans [24]. En fait, cette notion généralise la différentiabilité classique i.e. la notion de Fréchet différentiabilité des fonctions. Le but de ce chapitre est de donner la version multivoque des théorèmes fondamentaux en calcul différentiel classique, notamment, le théorème de la moyenne, le théorème d'inversion locale et le théorème de multifonction implicite.
Soient $X$ et $Y$ deux espaces vectoriels normés.

**Définition 2.2.1.** *Soient $U$ un ouvert non vide dans $X$ et $F : U \rightrightarrows Y$ une multifonction définie sur $U$. On dira que $F$ est différentiable en $X_0 \in U$ si $F$ est s.c.i en $X_0$ et s'il existe un opérateur linéaire continu $A : X \to Y$ tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in B(0, \delta_\varepsilon) : F(x_0 + x) \subset F(x_0) + A(x) + \varepsilon \|x\| \overline{B}_Y \tag{2.2.1}$$

*i.e.*

$$e(F(x_0 + x), F(x_0) + A(x)) \leq \varepsilon \|x\|$$

*et on note $DF(x_0) := A$ sa dérivée en $x_0$.*

**Exemple 2.2.1.** *La multifonction $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ telle que $F(x) := [a - x^2, d + x^2](a \leq b)$ est différentiable en $x_0 = 0$ avec $DF(x_0) := 0$. En effet, il est clair que $F$ est s.c.i en $0$ car $F(0) = [a, b] \subset F(x)$ pour tout $x$. D'autre part, comme $F(x) := F(0) + x^2[-1, 1]$ donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ tel que $x$ vérifiant $|x| \leq \varepsilon$ on'a*

$$F(x) \subset F(0) + \varepsilon |x| \overline{B}_\mathbb{R}$$

*D'où la différentiabilité de $F$ en $0$ avec $DF(0) = 0$.*

En toute généralité, on'a l'exemple suivant :

**Exemple 2.2.2.** *Considérons $g : X \to Y$ une fonction différentiable en $X_0$ et $r : x \to \mathbb{R}^+$ une fonction différentiable en $x_0$ telle que $Dr(x_0) = 0$. Alors la multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ définie par $F(x) := g(x) + r(x)\overline{B}_Y$ est différentiable en $x_0$ et $DF(x_0) = Dg(x_0)$. En effet, il est facile de vérifier que $F$ est s.c.i en $x_0$. prenons $\varepsilon > 0$, il existe alors $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour $x$ vérifiant $|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon$, on'a*

$$\begin{aligned} g(x + x_0) &\in g(x_0) + Dg(x_0)(x) + \frac{\varepsilon}{2} \|x\| \overline{B}_Y \\ r(x + x_0) &\in r(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \|x\| \overline{B}_\mathbb{R} \end{aligned}$$

*Ainsi pour $y := g(x + x_0) + r(x + x_0)b \in F(x + x_0)$ où $b$ est quelconque dans $\overline{B}_Y$, il existe $y' := g(x_0) + r(x_0)b \in F(x_0)$ et on'a*

$$\begin{aligned} \|y - y' - Dg(x_0)(x)\| &\leq \|g(x + x_0) - g(x_0) - Dg(x_0)(x)\| + \|r(x + x_0) - r(x_0)\| \|b\| \\ &\leq \varepsilon \|x\| \end{aligned}$$

*D'où $F$ est différentiable en $x_0$ et $DF(x_0) = Dg(x_0)$.*

**Remarque 2.2.1.** *Une multifonction différentiable $F : X \rightrightarrows y$ en un point $X_0$ peut admettre plusieurs dérivées au point en question. En effet,*

**Exemple 2.2.3.** *Soit $Y_0$ e.v.n de $Y$ tel que $Y_0 \neq \{0\}$, la multifonction "constante" $F : X \rightrightarrows Y$ telle que $F(x) := Y_0$ est différentiable en $x_0 \in X$ et tout opérateur linéaire continu $A : X \to Y_0$ est une dérivée de $F$ en $X_0$ i.e. $DF(x_0) = A$. En effet, c'est clair que $F$ est s.c.i en $x_0$. Considérons, maintenant, $A \in \mathcal{L}(X, Y_0)$. Alors comme pour tout $x \in X, A(x) \in Y_0$ et du fait que $Y_0$ est un s.e.v on'a*

$$F(x_0 + x) = F(x_0) + A(x) = Y_0$$

*et la conclusion s'en suit.*

Donnons quelques propriété relativement à la somme et le produit de deux multifonctions.

**Propriété 2.2.1.** *Si $F, G : X \rightrightarrows Y$ et $H : X \rightrightarrows Z$ sont différentiable en $x_0 \in X$. Alors :*

*$(\mathcal{P}_1)$ La multifonction $S := F + G : X \rightrightarrows Y$ est différentiable en $x_0$ avec*

$$DS(x_0) = DF(x_0) + DG(x_0)$$

*$(\mathcal{P}_2)$ La multifonction $P := (F, G) : X \rightrightarrows Y \times Z$ est différentiable en $x_0$ avec*

$$DP(x_0) = (DF(x_0), DH(x_0))$$

**Preuve.** Montrons que la première propriété. on sait déjà que la somme de deux multifonctions s.c.i (voir section 1). Comme $F$ (resp. $G$) est différentiable en $x_0$, il existe un opérateur linéaire continu $DF(x_0) := A$ (resp. $DG(x_0) := B$) tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha, \beta > 0$ de sorte que :

$$\begin{aligned} F(x_0 + x) &\subset F(x_0) + A(x) + \frac{\varepsilon}{2}\|x\|\overline{B}_Y \quad \forall x \in B(0, \alpha) \\ G(x_0 + x) &\subset G(x_0) + B(x) + \frac{\varepsilon}{2}\|x\|\overline{B}_Y \quad \forall x \in B(0, \beta) \end{aligned}$$

Ainsi pour $x \in B(0, \delta)$ où $\delta = min(\alpha, \beta)$, il vient que

$$\begin{aligned} S(x_0 + x) &:= F(x_0 + x) + G(x_0 + x) \\ &\subset F(x_0) + A(x) + \frac{\varepsilon}{2}\|x\|\overline{B}_Y + G(x_0) + B(x) + \frac{\varepsilon}{2}\|x\|\overline{B}_Y \\ &\subset S(x_0) + (A + B)(x) + \varepsilon\|x\|\overline{B}_Y \end{aligned}$$

D'où $(\mathcal{P}_1)$. De même façon, on montre la propriété $(\mathcal{P}_2)$. $\square$

La différentiabilité de la composée n'est pas toujours assurée, on doit imposer une condition supplémentaire. En effet, on'a la

**Proposition 2.2.1.** *Si $F : X \rightrightarrows Y$ et $G : Y \rightrightarrows Z$ sont différentiables en $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ respectivement et si $F(x_0) = \{y_0\}$ alors $G \circ F$ est différentiable en $x_0$.*

**Preuve.** On sait que $G \circ F$ est s.c.i en $x_0$ (cf. section 1. Les multifonctions $F, G$ étant différentiables en $x_0$ et $y_0$ respectivement, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tels que :

$$F(x_0, x) \subset F(x_0) + A(x) + \varepsilon\|x\|\overline{B}_Y \quad \forall x \in B(0, \delta_1)$$

et

$$G(y_0 + y) \subset G(y_0) + B(y) + \varepsilon\|y\|\overline{B}_Z \quad \forall y \in B(0, \delta_2) \tag{2.2.2}$$

où $A := DF(x_0)$ et $B := DG(y_0)$ Considérons $z \in (G \circ F)(x_0 + x)$ pour $x \in B(0, \delta)$ où $\delta := min(\delta_1, \frac{\delta_2}{\|A\|+\varepsilon})$, il existe donc $y \in F(x_0 + x)$ tel que : $z \in G(y)$. Comme $F(x_0) = \{y_0\}$ et

$$\begin{aligned} y &\in F(x_0 + x) \subset F(x_0) + A(x) + \varepsilon\|x\|\overline{B}_Y \\ y &\in y_0 + A(x) + \varepsilon\|x\|\overline{B}_Y \end{aligned}$$

il existe alors $u \in \overline{B}_Y$ tel que :

$$y = y_0 + A(x) + \varepsilon\|x\|u$$

Ainsi $z \in G(y_0 + A(x) + \varepsilon\|x\|u)$ avec :

$$\|A(x) + \varepsilon\|x\|u\| \le (\|A\| + \varepsilon)\|x\| \le \delta_2$$

car $\|u\| \le 1$ et $\|x\| \le \frac{\delta_2}{\|x\|+\varepsilon}$. Appliquons alors l'inclusion (2.2.2), il existe $z_0 \in G(y_0) = G \circ F(x_0)$ tel que :

$$\begin{aligned} \|z - z_0 - B(A(x) + \varepsilon\|x\|u)\| &\le \varepsilon\|A(x) + \varepsilon\|x\|u\| \\ &\le \varepsilon(\|A\| + \varepsilon)\|x\|. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\|z - z_0 - B \circ A(x)\| &\leq \|z - z_0 - B(A(x) + \varepsilon\|x\|u)\| + \|B(\varepsilon\|x\|u)\| \\ &\leq \varepsilon(\|A\| + \|B\| + \varepsilon)\|x\|\end{aligned}$$

$\varepsilon$ étant quelconque, on conclut que $G \circ F$ est différentiable en $x_0$ et $D(G \circ F)(x_0) = B \circ A$.
□

**Définition 2.2.2.** *On appelle sélection d'une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$, toute fonction $f : domF \to Y$ vérifiant :*

$$f(x) \in F(x) \qquad \forall x \in domF$$

**Remarque 2.2.2.** *toute multifonction semi-continue inférieurement en $(x_0, y_0) \in grF$ admet une sélection continue en $x_0$.*

Le lemme suivant établit le lieu entre la différentiabilité d'une multifonction $F$ et celle d'une sélection de $F$ .

**Lemme 2.2.1.** *Soient $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction définie sur $X$ tel que $F(x_0) = \{y_0\}$ et $A : X \rightrightarrows Y$ un opérateur linéaire continu. On suppose $F$ s.c.i en $(x_0, y_0)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

**1)** *$F$ est différentiable en $x_0$ avec $DF(x_0) = A$.*

**2)** *Toute sélection $f$ de $F$ est différentiable en $x_0$ avec $Df(x_0) = A$.*

**Preuve.** Supposons que $F$ est différentiable en $x_0$ avec $DF(x_0) = A$. Considérons une sélection $f$ de $F$, $\varepsilon > 0$. Comme $f(x_0 + x) \in F(x_0 = x)$, il va exister $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B(0, \delta)$, on'a

$$\begin{aligned}f(x_0 + x) &\in F(x_0 + x) \subset F(x_0) + A(x) + \varepsilon\|x\|\overline{B}_y \\ f(x_0 + x) &\in y_0 + A(x) + \varepsilon\|x\|\overline{B}_Y\end{aligned}$$

car $F(x_0) = \{y_0\}$. Or $f(x_0) \in F(x_0)$ donc $y_0 = f(x_0)$ et il vient que

$$f(x_0 + x) \in f(x_0) + A(x) + \varepsilon\|x\|\overline{B}_Y$$

Ce qui prouve que $f$ est différentiable en $x_0$ avec $Df(x_0) = A$.

Réciproquement, supposons que toute sélection $f$ de $F$ est différentiable en $x_0$ avec $Df(x_0) = A$ et supposons que $F$ n'est pas différentiable en $x_0$ avec $DF(x_0) = A$. Il existe alors $\alpha > 0$ et une suite $(x_n) \to 0$ telle que pour tout entier $n$ :

$$F(x_0 + x_n) \nsubseteq F(x_0) + A(x_n) + \alpha\|x_n\|\overline{B}_Y$$

Il existe donc une suite $(y_n)$ vérifiant $y_n \in F(x_0 + x_n)$ et $y_n \notin y_0 + A(x_n) + \alpha\|x_n\|\overline{B}_Y$ Maintenant, comme $F$ est s.c.i en $(x_0, y_0)$, il existe alors une sélection $g : X \to Y$ continue en $x_0$ de $F$. Définissons une fonction $f : X \to Y$ en posant :

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & \text{pour } x \in X\backslash\{x_0 + x_n : n \in \mathbb{N}\} \\ y_n & \text{pour } x = x_0 + x_n \end{cases}$$

Alors $f$ est une sélection de $F$ non différentiable en $x_0$ avec la dérivée $A$. En effet, il est clair que $f(x) \in F(x)$ pour tout $x \in X$ donc c'est bien une sélection. De plus, comme $f(x_0) = g(x_0) \in F(x_0) = \{y_0\}$ donc

$$f(x_0 + x_n) = y_n \notin f(x_0) + A(x_n) + \alpha\|x_n\|\overline{B}_Y$$

d'où $f$ n'est pas différentiable et la conclusion s'en suit. □

**Remarque 2.2.3.** *Lorsque $F(x_0) = \{y_0\}$ et $F$ est différentiable en $x_0$ alors la dérivée $DF(x_0)$ est unique. En effet, supposons qu'il existe deux opérateurs linéaires continus $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ tels que (2.2.1) soit satisfaite Soit $\varepsilon > 0$ ainsi pour tout $y \in F(x_0 + x)$ avec $x$ proche de 0, on'a les deux inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \|y - y_0 - A(x)\| &\leq \frac{\varepsilon}{2}\|x\| \\ \|y - y_0 - B(x)\| &\leq \frac{\varepsilon}{2}\|x\| \end{aligned}$$

*On conclut que pour tout $x$ au voisinage de $0, \|(A - B)(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$ i.e.*

$$\|A - B\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \varepsilon$$

*D'où le résultat en faisant tendre $\varepsilon$ vers $0^+$.*

### 2.2.3 Quasi-différentiabilité en un point du graphe

La notion de différentiabilité donnée dans la définition (2.2.1) est en fait très forte et difficile à réaliser. On introduit une notion plus faible en utilisant les excès bornés par la manière suivante :

**Définition 2.2.3.** *Soient $U$ un ouvert non vide dans $X$ et $F : U \rightrightarrows Y$ une multifonction définie sur. On dira que $F$ est qausi-différentiable en $(x_0, y_0) \in grF$ si $F$ est s.c.i en $(x_0, y_0)$ et s'il existe un opérateur linéaire continu $A : X \to Y$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon, \beta_\varepsilon > 0$ de sorte que :*

$$F(x_0 + x) \cap B(y_0, \beta_\varepsilon) \subset F(x_0) + A(x) + \varepsilon\|x\|\overline{B}_Y \quad \forall x \in B(0, \delta_\varepsilon)$$

*Autrement dit :*

$$e(F(x_0 + x) \cap B(y_0, \beta_\varepsilon), F(x_0) + A(x)) = o(\|x\|)$$

*et on note $DF(x_0, y_0) := A$ sa dérivée en $(x_0, y_0)$.*

**Exemple 2.2.4.** *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ telle que $F := g(x) + r(x)\overline{B}_Y$ avec $g : X \to Y$ et $r : X \to \mathbb{R}_+$ différentiable en $x_0$ avec $Dr(x_0) \neq 0$ (voir exemple(2.2.2), pour le cas $Dr(x_0) = 0$). Alors, pour tout $y_0 \in F(x_0), F$ est quasi-différentiable en $(x_0, y_0)$.*
*En effet, soient $\varepsilon > 0$ et $b_0 \in \overline{B}_Y$ tels que $y_0 = g(x_0) + r(x_0)b_0$. Sans restreindre la généralité, on suppose que $r(x_0) \neq 0$ et soit $\beta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon r(x_0)/9c)$ (où $c := \|Dr(x_0)\|$), alors par la continuité (resp. différentiabilité) des fonctions $g$ et $r$ en $x_0$, on peut trouver un rayon $\delta(\varepsilon) > 0$ de sorte que pour tout $x \in \delta(\varepsilon)\overline{B}_X$, on ait les inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned}
\|g(x_0 + x) - g(x_0)\| &< \beta(\varepsilon) \\
|r(x_0 + x) - r(x_0)| &\leq \beta(\varepsilon) \\
\|g(x_0 + x) - g(x_0) - Dg(x_0)x\| &\leq (\varepsilon/3)\|x\| \\
|r(x_0 + x) - r(x_0) - Dr(x_0)x| &\leq (\varepsilon/3)\|x\|
\end{aligned}$$

*Prenons maintenant un point $y \in F(x_0+x) \cap B(y_0, \beta(\varepsilon))$, donc $y := g(x_0+x) + r(x_0+x)b$ pour un certain $b \in \overline{B}_Y$. D'autre part, comme :*

$$\begin{aligned}
\|r(x_0)b - r(x_0)b_0\| &\leq \|r(x_0)b - r(x_0 + x)b\| + \|r(x_0 + x)b - r(x_0)b_0\| \\
&\leq |r(x_0 + x) - r(x_0)| + \|y - y_0\| + \|g(x_0 + x) - g(x_0)\| < 3\beta(\varepsilon)
\end{aligned}$$

*alors :* $\|b - b_0\| < 3\beta(\varepsilon)/r(x_0) < \varepsilon/3c$. *De plus :*

$$\|Dr(x_0)xb - Dr(x_0)xb_0\| \leq c\|x\|\|b - b_0\| \leq (\varepsilon/3)\|x\|$$

*et alors :*

$$y - y_0 \in Dg(x_0)x + Dr(x_0)xb_0 + \varepsilon\|x\|\overline{B}_Y$$

*On conclut que $F$ est quasi-différentiable en $(x_0, y_0)$ avec une dérivée $A$ donnée par*

$$A(x) = Dg(x_0)x + Dr(x_0)xb_0$$

**Proposition 2.2.2.** *Soient $U \subset X$ un ouvert contenant $x_0$ et $F : U \rightrightarrows Y$ une multi-fonction définie sur $U$ avec $F(x_0) = \{y_0\}$. On suppose que $F$ est ouverte en $(x_0, y_0)$ et quasi-différentiable en $(x_0, y_0)$ avec la dérivée $A \in Isom(X, Y)$. Alors $F^{-1}$ est quausi-différetiable en $(y_0, x_0)$ avec dérivée $A^{-1}$.*

**Preuve.** D'après la proposition (2.1.1) (cf. section 1), $F^{-1}$ est s.c.i en $(x_0, y_0)$.
Soit $\varepsilon \in (0, \frac{1}{1+\|A^{-1}\|})$, Lorsque $F$ est quasi-différentiable en $(x_0, y_0)$, on peut trouver $\beta_\varepsilon \delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, \delta_\varepsilon)$

$$\begin{aligned} F(x) \cap B(y_0, \beta_\varepsilon) &\subset F(x_0) + A(x - x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\|\overline{B}_Y \\ &\subset y_0 + A(x - x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\|\overline{B}_Y \qquad (2.2.3) \end{aligned}$$

Considérons $y \in B(y_0, \alpha_\varepsilon)$ et $x \in F^{-1}(y) \cap B(x_0, \eta_\varepsilon)$ avec $\alpha_\varepsilon \in B(0, \beta_\varepsilon)$ et $\eta_\varepsilon \in (0, \delta_\varepsilon)$. Alors $y \in F(x) \cap B(y_0, \alpha_\varepsilon) \subset F(x) \cap B(y_0, \beta_\varepsilon)$ avec $x \in B(x_0, \eta_\varepsilon) \subset B(x_0, \delta_\varepsilon)$ d'où d'après l'inclusion (2.2.3), il existe $u \in \overline{B}_Y$ tel que :

$$y = y_0 + A(x - x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\|u$$

Donc :

$$x - x_0 = A^{-1}(y - y_0) + \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\|A^{-1}u$$

et

$$\|x - x_0\| \leq \|A^{-1}\|\|y - y_0\| + \frac{\varepsilon}{2}\|A^{-1}\|\|x - x_0\|$$

Comme $\varepsilon < \frac{1}{1+\|A^{-1}}\|$, on obtient que :

$$\|x - x_0\| \leq 2\|A^{-1}\|\|y - y_0\|$$

Ainsi :

$$x \in x_0 + A^{-1}(y - y_0) + \varepsilon\|A^{-1}\|\|y - y_0\|\overline{B}_X$$

i.e.

$$F^{-1}(y) \cap B(x_0, \eta_\varepsilon) \subset F^{-1}(y_0) + A^{-1}(y - y_0) + \varepsilon\|A^{-1}\|\|y - y_0\|\overline{B}_X$$

d'où le résultat. □

### 2.2.4 Inégalité des accroissements finis

On se propose maintenant de faire une généralisation du théorème de la moyenne au cas multivoque. Pour cela, on notera par $\mathcal{D}F(x)$ l'ensemble des dérivées de $F$ en $x$.

**Théorème 2.2.1.** *Soient $X, Y$ des espaces de Banach et $F : X \rightrightarrows y$ une multifonction à valeurs non vides, différentiable sur $U$ un ouvert non vide de $X$. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ tel que $d(0, \mathcal{D}F(x)) < c$ pour tout $x \in U$. Alors $F$ est c-lipschitzienne sur $U$ : pour tout $x_0, x_1 \in U$ et tout $y \in F(x_1)$, il existe $y' \in F(x_0)$ vérifiant :*

$$\|y - y'\| \leq c\|x_1 - x_0\|$$

*i.e.*

$$F(x_1) \subset F(x_0) + c\|x_1 - x_0\|\overline{B}_Y \quad \forall x_0, x_1 \in U$$

**Preuve.** Rappelons tout d'abord que $d(0, \mathcal{D}F(x)) := \inf\{\|A\|, A \in \mathcal{D}F(x)\}$ et prenons deux points $x_0, x_1 \in U$. Considérons la multifonction $G : [0, 1] \rightrightarrows Y$ définie par :

$$G(t) = F((1 - t)x_0 + tx_1) \quad \forall t \in [0, 1]$$

C'est clair que $G$ est différentiable sur $[0, 1]$ et $DG(t) = DF(x_t)(x_1 - x_0)$ où $x_t = x_0 + t(x_1 - x_0) \in U$.
De plus, pour $t, s \in [0, 1]$ tels que : $t + s \in [0, 1]$ ($s$ proche de 0), on'a :

$$\begin{aligned}
G(t + s) &= F(x_0 + (t + s)(x_1 - x_0)) = F(x_t + s(x_1 - x_0)) \\
&\subset F(x_t) + A(s(x_1 - x_0)) + o(s)\|x_1 - x_0\|\overline{B}_Y \\
&\subset G(t) + sA(x_1 - x_0) + o(s)\|x_1 - x_0\|\overline{B}_Y
\end{aligned}$$

avec $A \in \mathcal{D}F(x_t)$ quelconque. On conclut que, pour $s > 0$ :

$$\frac{e(G(t+s), G(t))}{s} \leq (\|A\| + \frac{o(s)}{s})\|x_1 - x_0\| \tag{2.2.4}$$

Définissons maintenant, une fonction numérique $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ en posant, pour tout $t \in [0,1]$ :

$$g(t) := e(G(t), G(0))$$

Comme, d'après les propriétés de l'excès, on'a :

$$e(G(t+s), G(0)) \leq e(G(t+s), G(t)) + e(G(t), G(0))$$

alors :

$$\begin{array}{rcl} g(t+s) - g(t) & = & e(G(t+s), G(0)) - e(G(t), G(0)) \\ & \leq & e(G(t+s), G(t)) \end{array}$$

Par conséquent :

$$\frac{g(t+s) - g(t)}{s} \leq (\|A\| + \frac{o(s)}{s})\|x_1 - x_0\|$$

Passant à la limite supérieure, il vient que :

$$D^+ g(t) = \underset{s \to 0^+}{lim} \sup \frac{g(t+s) - g(t)}{s} \leq \|A\| \|x_1 - x_0\| \quad \forall t \in [0,1]$$

où $D^+ g(t)$ est la dérivée de Dini supérieure à droite de $g$ .
D'autre part, par application de théorème de la moyenne généralisé , on'a pour tous $a, b \in [0,1]$ il existe $c$ (compris entre $a$ et $b$) tel que :

$$g(a) - g(b) \leq D^+ g(c)|a - b|$$

d'où :

$$g(a) - g(b) \leq |a - b| \|A\| \|x_1 - x_0\|$$

Particulièrement, pour $a = 1$ et $b = 0$ :

$$g(1) - g(0) = e(G(1), G(0)) \leq \|A\| \|x_1 - x_0\|$$

ceci pour tout $A \in \mathcal{D}F(x_t)$. Prenant la borne inférieure, on obtient alors :

$$e(F(x_1), F(x_0)) \leq \|x_1 - x_0\|$$

et le résultat s'en suit par symétrie. □

**Corollaire 2.2.1.** *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction à valeurs non vides et différentiable sur $U$ un ouvert convexe non vide de $X$. Soient $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tels que pour tout $x \in U$, on'a $d(A, \mathcal{D}F(x)) < \varepsilon$. Alors :*

$$F(x_2) \subset F(x_1) + A(x_2 - x_1) + \varepsilon\|x_2 - x_1\|\overline{B}_Y \quad \forall x_1, x_2 \in U$$

**Preuve.** Il suffit d'appliquer le théorème précédent pour $G(\cdot) := (F - A)(\cdot)$ en remarquant qu'elle est différentiable sur $U$ avec $DG(x) = DF(x) - A$ et que :

$$d(0, \mathcal{D}G(x)) = d(0, \mathcal{D}F(x))$$

□

## 2.3 Différentiabilité Stricte

Dans le but d'établir un théorème d'inversion locale, on'a besoin comme dans le cas univoque, de renforcer la définition (2.2.1) par une notion plus forte qu'on appellera la différentiabilité stricte des multifonctions. Considérons toujours $X, Y$ des e.v.n et $U$ un ouvert non vide de $X$.

**Définition 2.3.1.** *Une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ à valeurs non vides est dite quasi-strictement différentiable en $(x_0, y_0) \in grF$ s'il existe un opérateur linéaire continu $A : X \to Y$ tels que pout tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha, \beta > 0$ :*

$$F(x) \cap B(y_0, \beta) \subset F(x') + A(x - x') + \varepsilon\|x - x'\|\overline{B}_Y \quad \forall x, x' \in B(x_0, \alpha) \tag{2.3.1}$$

*La multifonction $F$ est dite strictement différentiable en $x_0 \in U$ s'il existe $A : X \to Y$ un opérateur linéaire continu tel pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ :*

$$F(x) \subset F(x') + A(x - x') + \varepsilon\|x - x'\|\overline{B}_Y \quad \forall x, x' \in B(x_0, \alpha)$$

**Remarque 2.3.1.** *Notons que lorsque $F$ est univoque i.e. $F(x) = \{f(x)\}$ avec $f : X \to Y$, la notion de différentiablité stricte de $F$ coïncide à la notion classique de la stricte différentiabilité de la fonction $f$ .*

**Définition 2.3.2.** *Une fonction $f : X \to Y$ est strictement différentiable en $x_0$ s'il existe $A := Df(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ de sorte que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :*

$$\|f(x) - f(x') - Df(x - x')\| \leq \varepsilon\|x - x'\| \quad \forall x, x' \in B(x_0, \delta)$$

*Autrement dit, pout tous $x, x'$ au voisinage de $x_0$, on'a :*

$$f(x) \in f(x') + A(x - x') + o(\|x - x'\|)\overline{B}_Y$$

*Donnons maintenant deux lemmes qui seront très utiles concernant le théorème d'inversion.*

**Lemme 2.3.1.** *Une multifonction $F : U \rightrightarrows Y$ est quasi-strictement différetiable en un point $(x_0, y_0) \in grF$ si et seulement s'il existe un opérateur linéaire continu $A : X \to Y$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha, \beta > 0$ de sorte que :*

$$R(x) \cap B(z_0, \beta) \subset R(x') + \varepsilon\|x - x'\|\overline{B}_Y \quad \forall x, x' \in B(x_0, \alpha)$$

*où $R(\cdot) := (F - A)(\cdot)$ et $z_0 = y_0 - A(x_0)$.*

**Preuve.** D'après la définition (2.3.1), il existe un opérateur linéaire borné $A$ tel que (2.3.1) soit satisfaite pour des certains $\delta, \rho > 0$. Soient $\alpha := \min(\rho, \frac{\delta}{2(1+\|A\|)}), \beta := \frac{\delta}{2}$ et $x, x' \in B(x_0, \alpha)$ d'où $x, x' \in B(x_0, \rho)$. Considérons un point $y \in R(x) \cap B(z_0, \beta)$ donc il existe $u \in F(x)$ tel que $y = u - A(x)$. De plus, $u \in B(y_0, \delta)$ car :

$$\begin{aligned} \|u - y_0\| &= \|y - z_0 + A(x - x_0)\| \\ &\leq \|y - z_0\| + \|A\|\|x - x_0\| \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta\|A\|}{2(1 + \|A\|)} \leq \delta \end{aligned}$$

il existe alors, par (2.3.1), $u' \in F(x')$ de sorte que $y' := u' - A(x') \in R(x')$ et

$$\|y - y'\| \leq \varepsilon\|x - x'\|$$

□

**Lemme 2.3.2.** *Si $F : U \rightrightarrows Y$ est quasi-strictement différentiable en $(x_0, y_0) \in grF$ alors $F$ est s.c.i en $(x_0, y_0)$.*

**Preuve.** Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ vérifiant la définition ci-dessus, alors pour tout $x$ dans un voisinage de $x_0$, on'a :

$$d(y_0, F(x) + A(x_0 - x)) \leq \|x_0 - x\|$$

Et comme :

$$\begin{aligned} d(y_0, F(x)) &\leq d(y_0, F(x) + A(x_0 - x)) + \|A\|\|x - x_0\| \\ &\leq (1 + \|A\|)\|x_0 - x\| \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

La proposition suivante donne une condition suffisante pour qu'une multifonction $F$ soit strictement différentiable où on note par $\mathcal{D}F(u)$ l'ensemble de tous les opérateurs $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ vérifiant (2.2.1) au point $u$.

**Proposition 2.3.1.** *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction à valeurs non vides et différentiable sur un voisinage ouvert $U$ de $x_0 \in X$ telle que :*

$$\underset{u \to x_0}{lim} \inf \mathcal{D}F(u) := \left\{ A \in \mathcal{L}(X, Y) : \underset{u \to x_0}{lim}\, d(A, \mathcal{D}F(u)) = 0 \right\} \neq \emptyset$$

*Alors $F$ est strictement différentiable en $x_0$.*

**Preuve.** Comme $\underset{u \to x_0}{lim} \inf \mathcal{D}F(u) \neq \emptyset$, il existe un opérateur linéaire continu $A : X \to Y$ tel que : $\underset{u \to x_0}{lim}\, d(A, \mathcal{D}F(u)) = 0$. D'où pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ de sorte que :

$$\inf_{B \in \mathcal{D}F(u)} \|A - B\| < \varepsilon \qquad \forall u \in B(x_0, \delta)$$

Ainsi par la caractérisation de la borne inférieure, pour tout $u \in B(x_0, \delta)$, on peut trouver $A_u \in \mathcal{D}F(u)$ vérifiant $\|A_u - A\| \leq \varepsilon$. par conséquent, d'après le corollaire (2.2.1), on'a :

$$F(x_2) \subset F(x_1) + A(x_2 - x_1) + \varepsilon\|x_2 - x_1\|\overline{B}_Y$$

pour tous $x_1, x_2 \in B(x_0, \delta)$. D'où $F$ est strictement différentiable en $x_0$. □

**Proposition 2.3.2.** *Soient $X, Y, Z$ des e.v.n $F : X \rightrightarrows Y$ (resp. $G : X \rightrightarrows Z$) strict-différentiable en $(x_0, y_0) \in grF$ (resp. $(x_0, z_0) \in grG$ ) et soit $g : X \to Y$ strict-différentiable en $x_0$. Alors*

($\mathcal{P}_1$) *La multifonction $H := (F, G) : X \rightrightarrows Y \times Z$ est strict-différentiable en $(x_0, (y_0, z_0))$.*

($\mathcal{P}_2$) *La multifonction $H := F + g$ est strict. différentiable en $(x_0, y_0 + g(x_0))$.*

**Preuve.** Voir [17].
□

Pour la composition des multifonctions, le cas n'est pas toujour vrai. Cependant, on a un résultat partiel sur la composition d'une multifonction avec une fonction. En effet, on donne ci-dessous un résultat de différentiabilité stricte de la composée $G \circ f$.

**Proposition 2.3.3.** *Soient $X, Y, Z$ des e.v.n $f : X \to Y$ une fonction strictement différentiable en $x_0$ et $G : Y \rightrightarrows Z$ une multifonction strictement différentiable en $y_0 = f(x_0)$. Alors $H := G \circ f$ est strictement différentiable en $x_0$.*

**Preuve.** Comme $f$ est strict. différentiable en $x_0$, il existe $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ de sorte que :

$$f(x) \in f(x') + A(x - x') + \varepsilon \|x - x'\| \overline{B}_Y \quad \forall x, x' \in B(x_0, r) \tag{2.3.2}$$

D'autre part, $G$ est strict-différentiable en $y_0 = f(x_0)$, il existe $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $s > 0$ de sorte que :

$$G(y) \subset G(y') + B(y - y') + \varepsilon \|y - y'\| \overline{B}_Z \quad \forall y, y' \in B(y_0, s) \tag{2.3.3}$$

Soit $\varepsilon \in (0, 1)$ et soit $\rho := \min(r, \frac{r}{c})$ où $c := \|A\| + 1$.
Considérons deux points $x, x' \in B(x_0, \rho)$ alors $f(x), f(x') \in B(y_0, s)$. En effet, comme $x \in B(x_0, r)$, on'a : d'après (2.3.2), il vient que :

$$\begin{aligned}
\|f(x) - y_0\| &= \|f(x) - f(x_0)\| \leq \|A(x - x_0)\| + \varepsilon \|x - x_0\| \\
&\leq \|A\| \|x - x_0\| + \varepsilon \|x - x_0\| \\
&\leq c \|x - x_0\| < c\rho \leq s
\end{aligned}$$

Donc d'après les inclusions (2.3.2) et (2.3.3) et du fait que $B$ est linéaire borné, on obtient :

$$\begin{aligned} G(f(x)) &\subset G(f(x')) + B(f(x) - f(x')) + \varepsilon\|f(x) - f(x')\|\overline{B}_Z \\ &\subset G(f(x')) + B(A(x - x') + \varepsilon\|x - x'\|\overline{B}_Y) + c\varepsilon\|x - x'\|\overline{B}_Z \\ &\subset G \circ f(x') + (B \circ A)(x - x') + \varepsilon B(\|x - x'\|\overline{B}_Y) + c\varepsilon\|x - x'\|\overline{B}_Z \end{aligned}$$

Or $B(\|x-x'\|\overline{B}_Y) \subset \|B\|\|x-x'\|\overline{B}_Z$ : en effet, si $z \in B(\|x-x'\|\overline{B}_Y)$ i.e. $z = B(\|x-x'\|y)$ avec $\|y\| \leq 1$. Alors :

$$\|z\| \leq \|B\|\|x - x'\|\|y\| \leq \|B\|\|x - x'\|$$

d'où $z \in \|B\|\|x - x'\|\overline{B}_Z$. Ainsi, on'a :

$$G \circ f(x) \subset G \circ f(x') + (B \circ A)(x - x') + \varepsilon(\|B\| + c)\|x - x'\|\overline{B}_Z$$

i.e. $H := G \circ f$ est strict. différentiable en $x_0$ avec $D(G \circ f)(x_0) = B \circ A$. □

## 2.4 Lipschitziannité des multifonctions

L'objectif de section est de présenter le théorème de point fixe pour les multifonction contractantes. Pour cela, on va donner quelques définition et propriétés relatives à la lipschitziannité des multi-applications. Des exemples illustratifs seront aussi mis en évidence. Dans la suite, $X, Y$ désignent deux espaces métriques (sauf mention contraire).

### 2.4.1 Notion de pseudo-lipschitziannité

Introduisons, tout d'abord, la notion de lipschitaiannité des multifonctions qui sera modifiée par la suite par une autre version plus faible.

**Définition 2.4.1.** *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction à valeur non vides. On dit que $F$ est lipschitzienne s'il existe une constante $\theta \geq 0$ telle que*

$$e(F(x), F(x')) \leq \theta d(x, x') \quad \forall x, x' \in X \tag{2.4.1}$$

*Si $\theta = 1, F$ est dite non dilatante et si $0 \leq \theta < 1, F$ est dite $\theta-$contractante.*
*Autrement dit, pour tout $y \in F(x)$, il existe $y' \in F$ vérifiant*

$$d(y, y') \leq \theta d(x, x')$$

*Lorsque les espaces sont des e.v.n la condition (2.4.1) peut d'écrire sous la forme*

$$F(x) \subset F(x') + \theta\|x - x'\|\overline{B}_Y \quad \forall x, x' \in X \tag{2.4.2}$$

*où $\overline{B}_Y$ est la boule unité dans $Y$.*
*Il est clair qu'une multifonction lipschitzienne est continue au sens de Hausdorff sur $X$ et remarquons que (2.4.1) est équivalente à*

$$d_H(F(x), F(x')) \leq \theta d(x, x') \quad \forall x, x' \in X$$

**Exemple 2.4.1.** *Soit $f : X \to Y$ une fonction $\theta-$lipschitzienne alors la multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ définie par $F(x) := \{f(x)\}$ est $\theta-$lipschitzienne.*

**Exemple 2.4.2.** *Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions lipschitziennes de constantes $\alpha, \beta$ respectivement et telle que*

$$\Omega := \{x \in X : f(x) \leq g(x)\} \neq \emptyset$$

*(c'est le cas par exemple, si $f$ et $g$ sont affines). Définissons une multifonction $F : X \rightrightarrows \mathbb{R}$ par*

$$F(x) := \begin{cases} [f(x), g(x)] & si\, f(x) \leq g(x) \\ \emptyset & sinon \end{cases}$$

*Alors $F$ est lipschitzienne. En effet, il suffit de montrer que (2.4.1) est satisfaite sur le domaine de $F$ i.e. sur $domF = \Omega$.*
*Considérons $x, x' \in \Omega$ et $y \in F(x) = [f(x), g(x)]$. Il existe alors $\lambda \in [0, 1]$ tel que $y = \lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)$. Prenons $y' = \lambda f(x') + (1 - \lambda)g(x') \in F(x')$ et on'a*

$$\begin{aligned} |y - y'| &= |\lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x) - \lambda f(x') - (1 - \lambda)g(x')| \\ &\leq \lambda|f(x) - f(x')| + (1 - \lambda)|g(x) - g(x')| \\ &\leq \lambda\alpha d(x, x') + (1 - \lambda)\beta d(x, x') \\ &\leq (\alpha + \beta)d(x, x') \end{aligned}$$

*D'où $F$ est $(\alpha + \beta)-$ lipschitzienne.*

**Exemple 2.4.3.** *Soit $A$ une partie non vide de $Y$ et considérons la multifonction "constante" $F : X \rightrightarrows Y$ définie par $F(x) := A$. Il est clair que $F$ est une contraction de constante $\theta = 0$.*

**Quelques propriétés des multifonctions lipschitziennes :**

**Propriété 2.4.1.** *Soient $X, Y, Z$ des e.v.n $F : X \rightrightarrows Y$ (resp. $G : X \rightrightarrows Y$) une multifonction $\alpha$ (resp. $\beta$)-lipschitzienne et soit $H : Y \rightrightarrows Z$ une multifonction $\gamma$-lipschitzienne, alors les multifonctions $\lambda F, F + G, F \cup G, (F, G), H \circ F$ sont lipschitziennes.*

**Preuve.** Faisons la preuve pour la reunion et la composition. Considérons $x, x' \in X$ et $y \in F \cup G(x)$. Alors d'après les propriétés de la borne inférieure, à savoir $\inf_B \leq \inf_A$ lorsque $A \subset B$, il vient que :

$$d(y, F \cup G(x')) \leq \max(d(y, F(x')), d(y, G(x')))$$

D'autre part, comme si $y \in F(x)$ (resp. $y \in G(x)$) on'a :

$$\begin{aligned} d(y, F(x')) &\leq e(F(x), F(x')) \leq \alpha d(x, x') \\ (\text{resp. } d(y, G(x')) &\leq e(G(x), G(x')) \leq \beta d(x, x')) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} d(y, F \cup G(x')) &\leq \max(\alpha, \beta) d(x, x') \\ e(F \cup G(x), F \cup G(x')) &\leq \max(\alpha, \beta) d(x, x') \end{aligned}$$

Soit maintenant $z \in Hy$ avec $y \in F(x)$. Comme $H(F(x')) = \cup_{y' \in F(x')} H(y')$ alors :

$$\begin{aligned} d(z, H(F(x'))) &\leq d(z, H(y')) \quad \forall y' \in F(x') \\ &\leq \gamma d(y, y') \quad \forall y' \in F(x') \end{aligned}$$

Et par passage à la borne inférieure sur $F(x')$ puis la borne supérieure sur $F(x)$, il vient :

$$\begin{aligned} d(z, H(F(x'))) &\leq \gamma d(y, F(x')) \leq \gamma e(F(x), F(x')) \\ &\leq \alpha \gamma d(x, x'). \end{aligned}$$

Où $z$ est quelconque dans $H(F(x))$. D'où le résultat. □

L'exemple suivant est inspiré de [24] et montre que la propriété de lipschitziannité n'est pas stable par intersection.

**Exemple 2.4.4.** *Soient* $I := [0,1] \times [0,1], F, G : I \rightrightarrows I$ *telle que :* $F(x,y)$ *est le segment d'extrèmités* $A(\frac{x}{2},0)$ *et* $B(\frac{x}{2},1)$*,* $G(x,y)$ *est la ligne du segment d'extrémités* $A(\frac{x}{2},0)$ *et* $C(\frac{x}{3},1)$ *pour tout* $x \in [0,1]$*. Autrement dit,* $F(x,y) := \{\frac{x}{3}\} \times [0,1]$ *et :*

$$G(x,y) := \begin{cases} \{(t, -\frac{6t}{x}+3) : t \in [\frac{x}{3}, \frac{x}{2}]\} & si\, x \neq 0 \\ \{0\} \times [0,1] & si\, x = 0 \end{cases}$$

*Alors :* $F$ *et* $G$ *sont des contractions alors que* $F \cap G$ *qui est définie pour tout* $(x,y) \in I$ *par :*

$$F \cap G(x,y) = \begin{cases} \{(\frac{x}{2},0)\} & si\ x \neq 0 \\ \{0\} \times [0,1] & si\, x = 0 \end{cases}$$

*n'est pas lipschitzienne car elle n'est pas continue au sens se Hausdorff (non s.c.i en* $(0,0)$*).*

**Remarque 2.4.1.** *Notons que la condition (2.4.1) (resp. (2.4.2)) est une condition trés forte. Une notion plus faible de lipschitziannité(dite propriété de Aubin) [6] peut-être introduite faisant intervenir les excès bornés et rendant la propriété plus réalise.*

Cette notion s'énonce comme suit :

**Définition 2.4.2.** *Soient* $X, Y$ *des espaces métriques,* $U, V$ *deux sous-ensembles non vides de* $X$ *et* $Y$ *respectivement. Une multifonction* $F : X \rightrightarrows Y$ *à valeur non vides est dite pseudo-*$\theta$*-lipschitzienne sur* $U$ *relativement à* $V$ *s'il existe* $\theta > 0$ *tel que pour tout* $x, x' \in U$*, on'a :*

$$e(F(x) \cap V, F(x')) \leq \theta d(x,x')$$

*Lorsque* $\theta \in [0,1], X = Y, V = U$*, on dit que* $F$ *est pseudo-*$\theta$*-contractive relativement à* $U$*. On dit que* $F$ *est pseudo-*$\theta$*-lipschitzienne en* $(x_0, y_0) \in grF$ *s'il existe un voisinage* $U$ *de* $x_0$ *et un voisinage* $V$ *de* $y_0$ *tels que :*

$$e(F(x) \cap V, F(x')) \leq \theta d(x,x') \qquad \forall x, x' \in U$$

**Exemple 2.4.5.** *Soit* $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que :* $s(x) := 1 + \sqrt{|x|}$ *et définissons* $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *par* $F(x) := [-s(x), s(x)]$*. Alors* $F$ *est pseudo-lipschitzienne en* $(0, 0)$*. En effet,*
*soient* $x, x' \in U = V :=]-\epsilon, \epsilon[$ *avec* $\epsilon \in (0, 1)$*. D'où* $F(x) \cap V = V \subset F(x')$ *ainsi pour tout* $y \in F(x) \cap V$*, il existe* $y' = y$ *et tel que :*

$$|y - y'| = 0 \leq \theta |x - x'|$$

**Lemme 2.4.1.** *Si* $F$ *est pseudo-*$\theta$*-lipschitzienne en* $(x_0, y_0) \in grF$ *alors* $F$ *est s.c.i en* $(x_0, y_0)$*.*

**Preuve** Supposons $F$ pseudo-$\theta$-lipschitzienne en $(x_0, y_0) \in grF$, il existe donc $U \in \upsilon(x_0)$ et $V \in \upsilon(y_0)$ tels que pour tous $x, x' \in U$, on'a :

$$e(F(x) \cap V, F(x')) \leq \theta d(x, x')$$

Et, comme $y_0 \in F(x_0) \cap V$, alors

$$d(y_0, F(x)) \leq \theta d(x_0, x)$$

On conclut que $d(y_0, F(x)) \to 0$ lorsque $x \to x_0$. $\square$

# Chapitre 3

# Théorèmes de Point Fixe et applications contractantes

## 3.1 Théorème de point fixe sur des espaces métrique

### 3.1.1 Introduction

Cette section est constitué de quelques théorèmes de point fixe pour des multifonctions définies sur un espace métrique et à valeurs dans lui-même .

### 3.1.2 Théorème de Nadler et théorème de Caristi multivoque

**Définition 3.1.1.** *Soit $F : X \rightrightarrows Y$, Une multifonction où $X$ et $Y$ sont des espaces métriques. On dit que $F$ est une contraction s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que*

$$d_H(F(x), F(x')) \leq kd(x, x') \quad \forall x, x' \in X$$

**Théorème 3.1.1.** *(Caristi univoque) Soit $\Phi : X \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement bornée inférieurement, Soit $f : X \to X$ une fonction quelconque telle que $d(x, f(x)) \leq \Phi(x) - \Phi(f(x))$ pour tout $x \in\in X$. Alors $f$ admet un point fixe.*

**Preuve.** voir [10] □

Le théorème de Nadler est une généralisation du principe de contraction de Banach pour les contractions multivoques, dont la preuve repose sur le théorème de Caristi.

**Théorème 3.1.2.** *(Nadler) Soit $F : X \rightrightarrows X$ une contraction multivoque à valeurs fermées avec constante de contraction $k$. Alors, $F$ admet un point fixe.*

**Preuve.** Soit $x \in X$, Remarquons que pour tout $y \in F(x)$, $d_H$ étant la distance de Hausdorff nous avons :

$$\begin{aligned} d(y, F(y)) &\leq d_H(F(x), F(y)) \\ &\leq kd(x, y) \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{1}{1+\varepsilon} > k$. Pour tout $x \in X$, il existe $y \in F(x)$ tel que :

$$d(x, y) \leq (1 + \varepsilon)d(x, F(x))$$

Posons, pour tout $x \in X$, $f(x) = y$. Alors, $f$ est une fonction de $X$ dans $X$ qui satisfait, pour tout $x \in X$, $f(x) \in F(x)$ et :

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{1+\varepsilon} - k\right] d(x, f(x)) &\leq d(x, F(x)) - kd(x, f(x)) \\ &\leq d(x, F(x)) - d(f(x), F(f(x))). \end{aligned}$$

Soit $\phi : X \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :

$$\phi(x) = \left[\frac{1}{1+\varepsilon} - k\right]^{-1} d(x, F(x))$$

La fonction $\phi$ est une fonction continue et bornée inférieurement.
Par le théoréme (3.1.1), nous pouvons conclure que $f$ a un point fixe $z$. Donc, $z = f(z) \in F(z)$. $\square$

Il existe une généralisation du théorème de Caristi aux multifonctions.

**Théorème 3.1.3.** *(Caristi multivoque). Soit $\phi : X \to (-\infty, +\infty]$ une fonction propre semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Soit $F : X \rightrightarrows X$ une multifonction tel que pour tout $x \in X$ il existe $y \in F(x)$ tel que :*

$$d(x, y) \leq \phi(x) - \phi(y)$$

*Alors $F$ admet un point fixe.*

**Preuve.** Pour chaque $x \in X$ posons $f(x) = y$ où $y$ est un élément de $X$ tel que : $y \in F(x)$ et $d(x,y) \leq \phi(x) - \phi(y)$. Alors, $f$ est une fonction de $X$ dans $X$ qui satisfait :

$$d(x, f(x)) \leq \phi(x) - \phi(f(x)) \qquad \text{Pour tout} \quad x \in X$$

Puisque $\phi$ est une fonction propre, il existe $u \in X$ tel que $\phi(u) < +\infty$. Alors, posons :

$$X' = \{x \in X : \phi(x) \leq \phi(u) - d(u,x)\}$$

$X'$ n'est pas vide puisque $u \in X'$. De plus, par la semi-continuité inférieure de $\phi$, $X'$ est fermé et est donc un espace métrique complet.
Remarquons que la fonction $\phi$ restreinte à $X'$ est à valeurs réelles et qu'elle est aussi semi-continue inférieurement et bornée inférieurement.
Montrons maintenant que $X'$ est invariant sous $f$. Pour tout $x \in X'$, nous avons :

$$\begin{aligned} \phi(f(x)) &\leq \phi(x) - d(x, f(x)) \\ &\leq \phi(u) - (d(u,x) + d(x, f(x))) \\ &\leq \phi(u) - d(u, f(x)) \end{aligned}$$

Donc, $f(x) \in X'$ pour tout $x \in X'$.
Le théorème (3.1.1) nous permet de conclure que $f$ a un point fixe $z \in X'$. Donc, $z = f(z) \in F(z)$. □

Maintenant que nous avons énoncé ce théorème, nous pouvons démontrer plus simplement le principe variationnel d'Ekeland.

**Théorème 3.1.4.** *(Principe variationnel d'Ekeland). Soit $\phi : X \to (-\infty, +\infty]$ une fonction propre semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Pour chaque $\varepsilon > 0$ et chaque $u \in X$ tel que $\phi(u) \leq \inf_{x \in X} \phi(x) + \varepsilon$, il existe $v \in X$ tels que :*

**1)** $\phi(v) \leq \phi(u)$

**2)** $d(u,v) \leq 1$

**3)** $\phi(v) \leq \phi(x) + \varepsilon d(x,v)$ *pour tout $x \in X$ tel que $x \neq v$*

**Preuve.** Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $u \in X$ vérifiant $\phi(u) \leq \inf_{x\in X} \phi(x) + \varepsilon$ tel que la conclusion du théorème (3.1.4) soit fausse.
Définissons $\psi : X \to (-\infty, +\infty]$ par :

$$\psi(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } \phi(x) + \varepsilon d(x,u) \leq \phi(u) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction est propre, semi-continue inférieurement et bornée inférieurement.
Définissons une multifonction $F : X \rightrightarrows X$ par :

$$F(x) = \begin{cases} \{u\} & \text{si } \ \psi(x) = \infty \\ X\backslash\{x\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque $\psi(u) = \phi(u) < \infty$, il est clair que $F$ est sans point fixe.
Montrons que $F$ vérifie les hypothèses du théorème (3.1.3) Si $\psi(x) = \infty$, $u \in F(x)$ et :

$$\varepsilon d(x,u) \leq \psi(x) - \phi(u) = \psi(x) - \psi(u)$$

D'autre part, si $\psi(x) < \infty$,

$$\phi(x) \leq \phi(u) \quad et \quad \varepsilon d(x,u) \leq \phi(u) - \phi(x) \leq \phi(u) - \inf_{x\in X} \phi(x) \leq \varepsilon$$

Il faut donc que l'hypothése (3) du Théorème (3.1.4) soit faux.
Ainsi, il existe $y \in X\backslash\{x\} = F(x)$ tel que :

$$\varepsilon d(x,y) \leq \phi(x) - \phi(y) = \psi(x) - \psi(y).$$

En effet :

$$\begin{aligned} \phi(y) + \varepsilon d(y,u) &\leq \phi(x) - \varepsilon d(x,y) + \varepsilon d(y,u) \\ &\leq \phi(u) - \varepsilon(d(u,x) + d(x,y)) + \varepsilon d(y,u) \\ &\leq \phi(u) \end{aligned}$$

Il s'agit d'une contradiction en vertu du Théorème (3.1.3)
La réciproque est également vraie. $\square$

**Proposition 3.1.1.** *le principe variationnel d'Ekeland implique la généralisation aux multifonctions du théorème de Caristi.*

**Preuve** Choisissons $u \in X$ tel que :

$$\phi(u) \leq \inf_{x \in X} \phi(x) + 1$$

Par le théorème (3.1.4), il existe $v \in X$ tel que : $d(x, v) > \phi(v) - \phi(x)$ pour tout $x \in X \backslash \{v\}$.
Or, par hypothèse, il existe $y \in F(v)$ tel que : $d(v, y) \leq \phi(v) - \phi(y)$.
Nécessairement, $v = y \in F(v)$. □

## 3.2 Contractions généralisées

### 3.2.1 Introduction

Dans cette partie nous revenons sur les contractions généralisées. Dans le papier [4], l'auteur passe en revue 25 généralisations de la notion d'applications contractives et précise les liens existant entre ces diverses généralisations. Nous nous intéressons spécialement à certaines d'entre elles qui nous semblent les plus représentatives. Nous montrons que toutes ces hypothèses impliquent une hypothèse très simple garantissant l'existence d'un point fixe.

Dans ce qui suit, on considère $T : X \to X$ définie dans un espace métrique complet $(X, d)$.

L'hypothèse contenant les hypothèses de papier cité est la suivante : il existe $\alpha > 0$, tel que pour tout $x \in X$ avec $x \neq F(x)$, il existe $u \in X \backslash \{x\}$ qui vérifie :

$$d(u, T(u)) + \alpha d(x, u) \leq d(x, T(x)) \qquad ([H])$$

Nous montrons dans le Lemme (3.2.2) que toutes ces contractions généralisées étudiées dans ce article vérifient l'hypothèse $[H]$.

**Lemme basique**

**Définition 3.2.1.** *Soit $(X, d)$ un espace métrique complet et soit $f : X \to \mathbb{R} \cup +\infty$. Un point $x \in X$ est appelé un d-point de $f$ si :*

$$f(x) < f(u) + d(u, x) \quad \textit{pour tout} \quad u \in X \backslash \{x\}$$

**Définition 3.2.2.** *(Ensembles de sous-niveaux des fonctions)*
*Soit la fonction* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Pour* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *on utilise les notations :*

$$[f \leq a] := \{x \in X : f(x) \leq a\}, \qquad [f < b] := \{x \in X : f(x) < b\}$$

*pour les ensembles de sous-niveaux "fermés" et "ouverts" respectivement de* $f$, *et de plus, si* $a < b$, *on pose :*

$$[a < f < b] := [f < b] \backslash [f \leq a]$$

*Si* $b = +\infty$, *on écrit aussi :*

$$[f > a] := [a < f < +\infty], \qquad dom f := [f < +\infty]$$

**Lemme 3.2.1.** *Soit* $f : X \to [0, +\infty]$ *une fonction s.c.i définie sur un espace métrique complet* $(X, d)$, *et soit* $0 \leq \lambda < \mu \leq +\infty$ *tel que :* $[f < \mu] \neq \emptyset$ . *On suppose que :*

$$\textit{Pour tout} \quad x \in [\lambda < f < \mu] \quad \textit{il existe} \quad y \neq x \quad \textit{tel que} \quad f(y) + d(x, y) \leq f(x).$$

*Alors,* $[f \leq \mu] \neq \emptyset$, *et pour tout* $x \in [f < \mu]$, *on peut trouver* $y \in [f \leq \lambda]$ *tel que :* $d(x, y) \leq f(x)$.

**Preuve.** Etant donnée $x \in [f < \mu]$, on'a $M_f(x) \subset [f < \mu]$. Notre hypothèse dit que tout point $x \in [\lambda < f < \mu]$ n'est pas un d-point de $f$. Alors : un d-point $y$ de $f$ qui appartient à $M_f(x)$ est nécessairement dans $[f \leq \lambda]$ et il vérifier :

$$d(x, y) \leq f(y) + d(x, y) \leq f(x).$$

□

### 3.2.2 Définitions de quelques types d'applications contractives

1. $[H_1]$ (Clarke) contraction directionnelle de Clarke : il existe $0 \leq k < 1$ tel que pour tout $x \in X$ avec $x \neq T(x)$, il existe $u \neq x$ qui vérifie :

$$\begin{cases} d(x, u) + d(u, T(x)) = d(x, T(x)) \\ d(T(u), T(x)) \leq k d(x, u) \end{cases}$$

2. $[H_2]$ (Song) Contraction directionnelle de Song : il existe $0 \leq k < \gamma < 1$ tel que pour tout $x \in X$ avec $x \neq T(x)$, il existe $u \neq x$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \gamma d(x,u) + d(u,T(x)) \leq d(x,T(x)) \\ d(T(u),T(x)) \leq kd(x,u) \end{cases}$$

3. $[H_3]$ (découle de clarke en posant $u = T(x)$) il existe $0 \leq k < 1$ tel que pour tout $x \in X$ avec $x \neq T(x)$, on'a :

$$d(T(x),T(T(x))) \leq kd(x,T(x))$$

4. $[H_4]$ il existe deux réels positifs $a, b$ avec $a + b < 1$ tels que pour tout $x, u \in X$ :

$$d(T(x),T(u)) \leq ad(x,T(x)) + bd(u,T(u))$$

5. $[H_5]$ (Reich) il existe des réels positifs $a, b, c$ avec : $a + b + c < 1$ tels que pour tous $x, u \in X$ :

$$d(T(x),T(u)) \leq ad(x,T(x)) + bd(u,T(u)) + cd(x,u)$$

6. $[H_6]$ (Bianchini) il existe un réel $0 \leq k < 1$ tel que pour tous $x, u \in X$ :

$$d(T(x),T(u)) \leq k \max(d(x,T(x)), d(u,T(u)))$$

7. $[H_7]$ (Rhoades [4]) il existe un réel $0 \leq k < 1$ tel que pour tous $x, u \in X$ :

$$d(T(x),T(u)) \leq k \max(d(u,T(x)), d(x,T(u)))$$

8. $[H_8]$ (Ciric) il existe des fonctions $q, r, s, t$ et $\lambda \in [0,1)$ avec :

$$\sup_{x,u \in X} (q(x,u) + r(x,u) + s(x,u) + 2t(x,u)) \leq \lambda < 1$$

telles que pour tous $x, u \in X$ :
$$d(T(x),T(u)) \leq q(x,u)d(x,u) + r(x,u)d(x,T(x)) + \\ s(x,u)d(u,T(u)) + t(x,u)[d(x,T(u)) + d(u,T(x))]$$

**Remarque 3.2.1.** *Dans le but de prouver l'existence des points fixes pour les multifonction, on établira une connexion des $[H_i]$ pour $i \in \{1,\ldots,8\}$ avec l'hypothèse $[H]$.*

Nous avons le lemme suivant :

**Lemme 3.2.2.**

$$\textit{Pour tout} \quad i \in \{1,\ldots,8\} \qquad [H_i] \Rightarrow [H]$$

**Preuve.** Soit $x \in X$ tel que : $d(x, T(x)) > 0$

1. si $[H_1]$ est satisfaite, on peut alors trouver $u \neq x$ tel que :

$$d(x, u) + d(u, T(x)) = d(x, T(x))$$

   d'où :

$$d(x, u) + d(u, T(u)) - d(T(u), T(x)) \leq d(x, T(x))$$

   et comme $d(T(x), T(u)) \leq kd(x, u)$, on'a :

$$d(x, u) + d(u, T(u)) - kd(x, u) \leq d(x, T(x))$$

   et donc :

$$d(u, T(u)) + (1 - k)d(x, u)) \leq d(x, T(x))$$

   ainsi : $[H]$ est satisfaite avec $\alpha = 1 - k > 0$

2. si $[H_2]$ est satisfaite, alors de la même manière on peut prouver que : $[H]$ est satisfaite avec $\alpha = \gamma - k > 0$

3. Remarquons que les applications qui vérifient $[H_3]$ sont un cas particulier de contractions directionnelles de Clarke c'est à dire elles vérifient $[H_1]$, en effet, en posant $u = T(x)$ dans $[H_3]$, on obtient, pour tout $x \neq T(x)$, il existe $u = T(x)$ tel que :

$$\begin{cases} d(x, u) + d(u, T(x)) = d(x, T(x)) \\ d(T(u), T(x)) \leq kd(x, u) \end{cases}$$

   ainsi si $[H_3]$ est satisfaite alors : $[H_1]$ l'est et par suite $[H]$ l'est aussi avec $\alpha = 1 - k$.

4. Si $[H_4]$ est satisfaite alors en l'écrivant pour $u = T(x)$, on obtient :

$$d(u, T(u)) \leq ad(x, u) + bd(u, T(u))$$

   et donc :

$$d(u, T(u)) \leq a(1 - b)^{-1}d(x, u)$$

   et par suite :

$$\begin{aligned} d(u, T(u)) - d(x, T(x)) &\leq a(1 - b)^{-1}d(x, u) - d(x, u) \\ &\leq (a + b - 1)(1 - b)^{-1}d(x, u) \end{aligned}$$

ainsi on obtient :

$$d(u,T(u)) + (1-(a+b))(1-b)^{-1}d(x,u) \leq d(x,T(x))$$

don il existe $\alpha = (1-(a+b))(1-b)^{-1} > 0$, tel que : $[H]$ est satisfaite.

5. De la même manière si $[H_5]$ est satisfaite alors : on obtient $[H]$ avec $\alpha = (1-(a+b+c))(1-b)^{-1} > 0$

6. En écrivant $[H_6]$ pour $u = T(x)$, on obtient :

$$d(u,T(u)) \leq k \max(d(u,T(u)), d(x,u))$$

comme $k < 1$, on'a évidemment $d(u,T(u)) \leq kd(x,u)$, et par suite :

$$d(u,T(u)) - d(x,T(x)) \leq kd(x,u) - d(x,u)$$

d'où :

$$d(u,T(u)) + (1-k)d(x,u) \leq d(x,T(x))$$

donc : [H] est satisfaite avec $\alpha = 1-k > 0$.

7. De même pour $[H_7]$, on obtient :

$$d(u,T(u)) \leq k \max(d(x,u), d(u,u)) = kd(x,u)$$

et donc

$$d(u,T(u)) - d(x,T(x)) \leq kd(x,u) - d(x,u)$$

d'où :

$$d(u,T(u)) + (1-k)d(x,u) \leq d(x,T(x))$$

donc : $[H]$ est satisfaite avec $\alpha = 1-k > 0$.

8. Enfin pour $[H_8]$, on obtient :

$$d(u,T(u)) \leq q(x,u)d(x,u) + r(x,u)d(x,u) + s(x,u)d(u,T(u)) + t(x,u)d(x,T(u))$$

donc :

$$d(u,T(u)) \leq (q(x,u)+r(x,u))d(x,u)+s(x,u)d(u,T(u))+t(x,u)(d(x,u)+d(u,T(u)))$$

et

$$d(u,T(u)) \leq (1-(s(x,u)+t(x,u))^{-1}(q(x,u)+r(x,u)+t(x,u))d(x,u)$$

et

$$d(u,T(u)) - d(x,T(x)) \leq (1-(s(x,u)+t(x,u))^{-1}(q+r+t)(x,u)d(x,u) - d(x,u)$$

donc :

$$d(u,T(u)) - d(x,T(x)) \leq ((q+r+s+2t)(x,u)-1)(1-(s(x,u)+t(x,u))^{-1}d(x,u)$$

soit

$$d(u,T(u)) - d(x,T(x)) \leq (\lambda-1)(1-\lambda)^{-1}d(x,u) = d(x,u)$$

et par suite $[H]$ est satisfaite avec $\alpha = 1$. □

### 3.2.3 Théorèmes des Points Fixes

Avans d'établir le théorème du point fixe pour les contraction nous avans besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.2.3.** *On suppose que :*

1. $[H]$ *est satisfaite*
2. *l'application* $x \mapsto d(x,T(x))$ *est semi-continue inférieurement. Alors, l'ensemble* $\Phi_T$ *des points fixes de* $T$ *est non vide et pour tout* $x \in X$ *:*

$$d(x,\Phi_T) \leq \alpha^{-1}d(x,T(x))$$

**Preuve.** Considérons la fonction semi-continue inférieurement :

$$f(x) = d(x,T(x))$$

D'après $[H]$ les hypothèses du Lemme (3.2.1) sont satisfaites avec $\mu = +\infty$ et avec la distance. $\widetilde{d} = \alpha d$. Il suffit alors d'appliquer le Lemme (3.2.1) et on obtient la conclusion du lemme. □

**Théorème 3.2.1.** *Si $T$ est continue et si l'une des hypothèses $[H_1], [H_2]$ ou $[H_3]$ est satisfaite alors :* $\Phi_T \neq \emptyset$, *et pour tout* $x \in X$

$$d(x, \Phi_T) \leq \alpha^{-1} d(x, T(x))$$

*avec :*

$$\alpha = \begin{cases} 1-k & si\ on'a\, [H_1]\, ou\, [H_3] \\ \gamma - k & si\ on'a\ \ [H_2] \end{cases}$$

**Preuve.** On définit $f : X \to \mathbb{R}$ par $T(x) = d(x, T(x))$. Comme $T$ est continue, $f$ est s.c.i. D'après le Lemme (3.2.2), si $[H_1], [H_2]$ ou $[H_3]$ est satisfaite alors : $[H]$ l'est aussi et la démonstration s'achève en appliquant le Lemme (3.2.3). □

**Théorème 3.2.2.** *Si $T$ est continue et si l'une des hypothèses $[H_i]$ pour $i \in \{4, \ldots, 8\}$ est satisfaite alors : $T$ admet un point fixe unique $\overline{x}$ et pour tout $x \in X$*

$$d(x, \overline{x}) \leq \alpha^{-1} d(x, T(x))$$

*avec :*

$$\alpha = \begin{cases} (1-(a+b))(1-b)^{-1} & si\ on\ a\, [H_4] \\ (1-(a+b+c))(1-b)^{-1} & si\ on\ a\, [H_5] \\ 1-k & si\ on\ a\, [H6]\, ou\, [H_7] \\ 1 & si\ on\ a\, [H_8] \end{cases}$$

**Preuve.** Dans le quatre situations, on montre que $x_1 = x_2$.
Comme dans le Théorème (3.2.1), l'existence d'un point fixe est assurée par le lemme 3.2.2. Montrons maintenant l'unicité. Pour cela, supposons qu'il existe deux points $x_1 \neq x_2$ tels que : $T(x_1) = x_1$ et $T(x_2) = x_2$ .

1. Si $[H_4]$ est satisfaite, en l'écrivant pour $x_1$ et $x_2$ on obtient :

$$d(x_1, x_2) \leq ad(x_1, x_1) + bd(x_2, x_2) = 0$$

2. Si $[H_5]$ est satisfaite, en l'écrivant pour $x_1$ et $x_2$ on obtient :

$$d(x_1, x_2) \leq ad(x_1, x_1) + bd(x_2, x_2) + cd(x_1, x_2) = cd(x_1, x_2) < d(x_1, x_2)$$

3. De même pour $[H_6]$ , on obtient :

$$d(x_1, x_2) \leq k \max(d(x_1, x_1), d(x_2, x_2)) = 0$$

4. De même pour $[H_7]$ , on obtient :

$$d(x_1, x_2) \leq k \max(d(x_1, x_2), d(x_1, x_2)) = kd(x_1, x_2) < d(x_1, x_2)$$

$\square$

Dans le but de prouver l'existence d'un point fixe, nous avons utilisé le Lemme (3.2.3) et ceci exige que la fonction $x \mapsto d(x, T(x))$ soit semi-continue inférieurement. Nous allons voir maintenant des résultats où l'on peut se passer de cette condition en supposant seulement que $T$ est de graphe fermé.

**Théorème 3.2.3.** *Soit $(X, d)$ un espace métrique complet et soit $T : X \to X$ une application à graphe fermé. On suppose que l'une des hypothèses $[H_i]$ avec $i \in \{4, \ldots, 8\}$ est satisfaite. Alors $T$ admet un point fixe unique $\overline{x}$ et pour tout $x \in X$ :*

$$d(x, \overline{x}) \leq \alpha^{-1} d(x, T(x))$$

*avec :*

$$\alpha = \begin{cases} (1-(a+b))(1-b)^{-1} & \text{si on a } [H_4] \\ (1-(a+b+c))(1-b)^{-1} & \text{si on a } [H_5] \\ 1-k & \text{si on a } [H6] \text{ ou } [H_7] \\ 1 & \text{si on a } [H_8] \end{cases}$$

**Preuve.** Sous l'une des hypothèses $[H_i]$ avec $i \in \{4, \ldots, 8\}$, et pour $u = T(x)$, l'hypothèse $[H]$ est satisfaite, donc on peut trouver $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in X, x \neq T(x)$, on'a :

$$d(u, T(u)) + \alpha d(x, u) \leq d(x, T(x))$$

avec $u = T(x)$. Soit $x_0 \in X$ et soit $x_k = T^k(x_0)$. Si $T(x_k) = x_k$ pour un $k$, le résultat est démontré. Sinon, on'a

$$d(x_{k+1}, x_{k+2}) + \alpha d(x_k, x_{k+1}) \leq d(x_k, x_{k+1}) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}.$$

En additionnant $p$ inégalités et en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$d(x_{k+p}, x_{k+p+1}) + \alpha d(x_{k+p}, x_k) \leq d(x_k, x_{k+1})$$

Cette dernière inégalité, nous montre que la suite $(x_n)_{n\in N}$ est de Cauchy.
En effet, la suite $(d(x_k, x_{k+1}))_{k\in N}$ est convergente car elle est décroissante, et

$$d(x_{k+p}, x_k) \leq \alpha^{-1}(d(x_k, x_{k+1}) - d(x_{k+1}, x_{k+2})) \quad \text{pour tout} \quad p \in \mathbb{N}^*$$

Soit alors : $\overline{x}$ sa limite. Comme $x_{k+1} = T(x_k)$ et comme le graphe de $T$ est fermé, on'a bien $T(\overline{x}) = \overline{x}$. □

**Théorème 3.2.4.** *Soit $(X, d)$ un espace métrique complet, $D \subset X$ un sous ensemble fermé, et soit $T : D \to X$ une application à graphe fermé. Si $[H_1]$ est satisfaite alors : $\Phi_T \neq \emptyset$, et pour tout $x \in D$*

$$d(x, \Phi_T) \leq (1-k)^{-1} d(x, T(x))$$

**Preuve.** Soit $(x, y) \in G_T$ fixé avec $y \neq x$. D'après $[H_1]$, on peut trouver $u \in D$ tel que :

$$d(x, y) = d(x, u) + d(u, y) \tag{3.2.1}$$

et :

$$d(y, T(u)) \leq k d(x, u) \tag{3.2.2}$$

En posant $v = T(u)$, on obtient de (3.2.1) :

$$d(x, u) + d(u, v) - d(v, y) \leq d(x, y)$$

et avec (3.2.2), on obtient :

$$d(u, v) + (1-k) d(x, u) \leq d(x, y) \tag{3.2.3}$$

Définisons la fonction $f : G_T \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x, y) = d(x, y)$$

De (3.2.2), on'a :

$$d(x,u) \geq k^{-1} d(y,v) \tag{3.2.4}$$

On considère $X \times X$ muni de distance :

$$\widetilde{d}((x',y'),(x'',y'')) := (1-k)^{-1} \max\{d(x',x''), k^{-1} d(y',y'')\}$$

Comme $G_T$ est fermé dans $(X \times X, \widetilde{d})$, alors : $(G_T, \widetilde{d})$ est complet et en combinant (3.2.3) et (3.2.4), on'a pour tout $(x,y) \in G_T$ , on peut trouver $(u,v) \in G_T$ tel que :

$$f(u,v) + \widetilde{d}((x,y),(u,v)) \leq f(x,y)$$

Donc avec $\mu = +\infty$, les hypothèses du Lemme (3.2.1) sont satisfaites et l'existence du point fixe s'en suit. □

**Théorème 3.2.5.** *Soit $(X,d)$ un espace métrique complet, $D \subset X$ un sous ensemble fermé, et soit $T : D \to X$ une application à graphe fermé. Si $[H_2]$ est satisfaite alors : $\Phi_T \neq \emptyset$, et pour tout $x \in D$*

$$d(x, \Phi_T) \leq (\gamma - k)^{-1} d(x, T(x))$$

**Preuve.** Soit $(x,y) \in G_T$ fixé avec $y \neq x$. D'après $[H_2]$, on peut trouver $u \in D$ tel que :

$$\gamma d(x,y) \leq d(x,u) + d(u,y) \tag{3.2.5}$$

etnh

$$d(y, T(u)) \leq k d(x,u) \tag{3.2.6}$$

En posant $v = T(u)$, on obtient de (3.2.5)

$$\gamma d(x,u) + d(u,v) - d(v,y) \leq d(x,y)$$

et avec : (3.2.6), on obtient :

$$d(u,v) + (\gamma - k) d(x,u) \leq d(x,y) \tag{3.2.7}$$

Définissons la fonction $f : G_T \to \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = d(x, y)$$

De (3.2.6), on'a :

$$d(x, u) \geq k^{-1} d(y, v) \tag{3.2.8}$$

On considère $X \times X$ muni de distance :

$$\widetilde{d}((x', y'), (x'', y'')) := (\gamma - k)^{-1} \max\{d(x', x''), k^{-1} d(y', y'')\}$$

Comme $G_T$ est fermé dans $(X \times X, \widetilde{d})$, alors : $(G_T, \widetilde{d})$ est complet et en combinant (3.2.7) et (3.2.8), on'a pour tout $(x, y) \in G_T$ , on peut trouver $(u, v) \in G_T$ tel que :

$$f(u, v) + \widetilde{d}((x, y), (u, v)) \leq f(x, y)$$

Donc avec $\mu = +\infty$, les hypothèses du Lemme (3.2.1) sont satisfaites et l'existence du point fixe s'en suit. $\square$

## 3.3 Application aux points fixes

On est intéressé, dans cette section, par le théorème d'existence de point fixe pour les multifonctions contractantes. C'est, en fait, une généralisation du théorème de Banach-Picard qui dit que toute fonction $f : X \to X$ contractante sur $(X, d)$ un espace métrique complet, admet un unique point fixe i.e. un point $\overline{x} \in X$ tel que $\overline{x} = f(\overline{x})$. Ce résultat a été généralisé pour les multifonctions contractantes puis pour les multifonctions pseudo-contractantes dans plusieurs travaux (voir, par exemple, [30], [1], [24], [12], ...).

**Définition 3.3.1.** *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction, on appelle point fixe de $F$ toute point $x \in X$ tel que : $x \in F(x)$.*
*Lorsque $F$ est univoque i.e. $F(x) = \{f(x)\}$ avec $f : X \to X$, on obtient la définition classique.*

On présente, ci-dessous, la généralisation du théorème de Banach-Picard pour les multifonctions donné dans [25]

**Théorème 3.3.1.** ([25]) *Soit $X$ un espace métrique complet, $x_0 \in X$ et $F : X \rightrightarrows X$ une multifonction à valeurs fermées non vides. On suppose que $F$ satisfait la condition de contraction suivante :*
*($\mathcal{C}$) pour tout $x \in B(x_0, r)$ on'a :*

$$d(y, F(y)) \leq \theta d(x, y),\ \forall y \in F(x) \cap B(x_0, r) \tag{3.3.1}$$

*où $\theta \in (0, 1)$ et $r > (1-\theta)^{-1} d(x_0, F(x_0))$. Alors :*

1. *Pour tout $\beta > d(x_0, F(x_0))$ tel que : $\beta(1-\theta)^{-1} < r$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(x_0, r)$ satisfaisant :*

$$x_{n+1} \in F(x_n) \quad et \quad d(x_{n+1}, x_n) \leq \theta^n \beta \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.3.2}$$

2. *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $B(x_0, r)$ vérifiant (3.3.2), sa limite $\overline{x} \in B(x_0, r)$ est un point fixe de $F$ et on'a :*

$$d(x_0, \Phi_F \cap B(x_0, r)) \leq (1-\theta)^{-1} d(x_0, F(x_0))$$

*où $\Phi_F$ est l'ensemble des points fixes de $F$.*

**Preuve.** Etant donné $\beta > d(x_0, F(x_0))$ tel que : $\beta(1-\theta)^{-1} < r$. Par la caractérisation de la borne inférieure, on peut trouver $x_1 \in F(x_0)$ vérifiant : $d(x_0, x_1) < \beta < r$ car $\beta < r$. Donc : $x_1 \in F(x_0) \cap B(x_0, r)$. Comme $F$ satisfait la condition (3.3.1), il vient que :

$$d(x_1, F(x_1)) \leq \theta d(x_0, x_1) \leq \theta\beta$$

Encore par la caractérisation de la borne inférieure, il existe $x_2 \in F(x_1)$ tel que :
$d(x_1, x_2) < \theta\beta$. Montrons que : $x_2 \in B(x_0, r)$,on'a :

$$\begin{aligned} d(x_0, x_2) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) \\ &< \beta + \theta\beta \leq (1+\theta)(1-\theta)r \\ &< (1-\theta^2)r < r \end{aligned}$$

d'où $x_2 \in F(x_1) \cap B(x_0, r)$. Par un raisonnement de récurrence, on construit une suite $(x_n)$ dans $B(x_0, r)$ telle que : $x_{n+1} \in F(x_n)$ et :

$$d(x_n, x_{n+1}) < \theta^n \beta \qquad \forall n$$

En effet, supposons l'existence $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans $B(x_0, r)$ tels que :

$$x_i \in F(x_{i-1}) \quad et\, d(x_{i-1,x_i}) < \theta^{i-1}\beta \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Utilisons l'inégalité (3.3.1) pour $x_n \in F(x_{n-1}) \cap B(x_0, r)$, on obtient :

$$d(x_n, F(x_n)) \leq \theta d(x_{n-1}, x_n) < \theta\theta^{n-1}\beta = \theta^n\beta$$

D'où l'existence de $x_{n+1} \in F(x_n)$ tel que $d(x_n, x_{n+1}) < \theta^n\beta$. Vérifions maintenant que $x_{n+1} \in B(x_0, r)$ on'a :

$$\begin{array}{rcl} d(x_0, x_{n+1}) & \leq & d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_n, x_{n+1}) \\ & < & (1 + \theta + \cdots + \theta^n)\beta \\ & < & \dfrac{1 - \theta^{n+1}}{1 - \theta}\beta \leq \dfrac{\beta}{1 - \theta} \leq r \end{array}$$

et donc $x_{n+1} \in B(x_0, r)$. Ainsi la suite $(x_n)_n$ vérifiant (3.3.2) existe et de plus, c'est une suite de Cauchy. En effet, pour tous entiers $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 1$, on'a les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} d(x_n, x_{n+p}) & \leq & d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ & < & \theta^n(1 + \theta + \cdots + \theta^{p-1})\beta \\ & < & \theta^n(\dfrac{\theta^p - 1}{\theta - 1})\beta \rightarrow_{n,p\rightarrow\infty} 0 \end{array}$$

Ainsi la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $B(x_0, r)$, soit $\overline{x} \in X$, la limite de $(x_n)_n$.
Montrons que $\overline{x} \in B(x_0, r)$, on'a :

$$d(x_0, \overline{x}) = \lim_{n\rightarrow\infty} d(x_0, x_{n+1}) \leq \frac{\beta}{1 - \theta} < r$$

$\overline{x} \in B(x_0, r)$. Il reste à montrer que $\overline{x} \in F(\overline{x})$. Par les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} d(\overline{x}, F(\overline{x})) & \leq & d(\overline{x}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, F(\overline{x})) \\ & \leq & d(\overline{x}, x_{n+1}) + e(F(x_n), F(\overline{x})) \\ & \leq & d(\overline{x}, x_{n+1}) + \theta d(x_n, \overline{x}) \end{array}$$

on conclut que : $\overline{x} \in F(\overline{x})$. Et donc $\overline{x} \in \Phi_F \cap B(x_0, r)$. Et comme, on'a :

$$d(x_0, \overline{x}) \leq (1-\theta)^{-1}\beta$$

on obtient, en faisant tendre $\beta$ vers $d(x_0, F(x_0))$

$$d(x_0, \overline{x}) \leq (1-\theta)^{-1} d(x_0, F(x_0))$$

D'où le résultat. □

**Remarque 3.3.1.**

1. *Lorsque $F$ est pseudo-$\theta$-contractive relativement à une boule ouverte $B(x_0, r)$ i.e.*

$$e(F(x) \cap B(x_0, r), F(x')) \leq \theta d(x, x'), \forall x, x' \in B(x_0, r)$$

*où $r > 0$ est tel que : $d(x_0, F(x_0)) < (1-\theta)r$ alors : la condition $(\mathcal{C})$ est trivialement et on obtient alors le résultat de Azé-Penot* [12] *comme conséquence directe.*

2. *Lorsque $F$ est une contraction sur $X$ tout entier, on obtient le corolaire suivant et qui est la première généralisation du théorème de Banach-Picard.*

**Corollaire 3.3.1.** *Soient $X$ un espace métrique complet et $F : X \rightrightarrows X$ une multifonction $\theta$-contractante à valeur fermée non vides. Alors $F$ admet au moins un point fixe.*

*Notons finalement que, une multifonction peut admettre plusieurs points fixes. En effet, Considérons $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ telle que $F(x) := [0, 1]$. Alors tout point de $[0, 1]$ est un point fixe de $F$.*

# Chapitre 4

# Théorème d'inversion locale et inclusion différentielle

## 4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré essentiellement au théorème d'inversion ainsi qu'au théorème des fonctions implicites étendu aux multifonctions. Comme applications on ce chapitre par une résolution d'inclusion différentielle relatifs aux notions de différentiabilité introduite au chapitre 2. Notons que la littérature est assez riche dans domaine, on cite, par exemple, les travaux dans [15], [11], [19], [2], [3], [25] . . .

## 4.2 Théorème d'inversion locale

Le théorème d'inversion donné dans [17] suppose que $\mathcal{D}F(x_0, y_0) \in Isom(X, Y)$, ici, on généralise ce résultat pour $A := \mathcal{D}F(x_0, y_0) : X \to Y$ surjectif avec $A^{-1} : Y \rightrightarrows X$, une multifonction bornante.

Rappelons que la multifonction $A^{-1} : Y \rightrightarrows X$ et dite bornante s'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\|x\| \leq c\|y\| \quad \forall y \in Y, \forall x \in A^{-1}(y) \tag{4.2.1}$$

et on définira la norme de $A^{-1}$ par :

$$\|A^{-1}\| := \inf\{c > 0 : \text{ (4.2.1)est satisfaite}\}$$

Observons qu'ici $A^{-1}$ est fermée, additive et satisfait $A^{-1}(\lambda y) = \lambda A^{-1}(y)\ \forall \lambda \neq 0$ avec $0 \in A^{-1}(0)$ (car $A$ est linéaire continu).

une généralisation de [17] s'énonce comme suit :

**Théorème 4.2.1.** *Soient $X, Y$ deux espaces de Banach, $X_0$ un ouvert dans $X$ et soit $F : X_0 \rightrightarrows Y$ une multifonction à valeur fermées non vides. On suppose que $F$ est quasi-strict-différentiable en $(x_0, y_0) \in grF$ avec $A := DF(x_0, y_0) \in Sur(X, Y)$ et $A^{-1}$ bornante. Alors $F$ est ouvert en $(x_0, y_0)$ Autrement dit, pour tout voisinage $U$ de $x_0$ dans $X_0$, il existe un voisinage $V$ de $y_0$ tel que $V \subset F(U)$.*

**Preuve.** Soit $U \subset X_0$ un voisinage quelconque de $x_0$, il existe alors $r > 0$ de sorte que : $U_0 := B(x_0, \frac{r}{\|A\|}) \subset U$. Il s'agit de trouver $s > 0$ tel que pour tout $y \in V_0 := B(y_0, s)$, il existe $x \in B(x_0, r)$ vérifiant : $y \in F(x)$. Remarquons alors que :

$$\begin{aligned} y \quad &\in \quad F(x) \Longleftrightarrow y \in R(x) + A(x) \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in A^{-1}(y - R(x)) \end{aligned}$$

où $R(x) := (F - A)(x)$. Ainsi cherchon $x$ tel que : $y \in F(x)$ revient à chercher les points fixes de la multifonction $G_y : X \rightrightarrows X$ définie par $G_y(x) := A^{-1}(y - R(x))$ pour tout $y$ fixé. On va alors appliquer le théorème d'existence de point fixe donné au chapitre précédent. Notons que $G_y$ est à valeurs non vides et fermées car $A$ est linéaire continu et sutjectif.

D'après le lemme (2.3.1), pour un certain $\theta \in (0, \frac{k}{1+\|A^{-1}\|})$ avec : $k \in (0, 1)$, on peut trouver $\sigma, \rho > 0, \rho \in (0, \sigma)$ tels que : $B(x_0, \rho) \subset X_0$ et

$$R(x) \cap \overline{B}(z_0, \sigma) \subset R(x') + \theta \|x - x'\| \overline{B}_Y \quad \forall x, x' \in B(x_0, \rho) \tag{4.2.2}$$

où $z_0 = y_0 - A(x_0)$.

Supposons que $r \in (0, \rho)$ et prenons : $s := \min(\sigma - r, \frac{(1-k)r}{\|A^{-1}\|})$. Soit $y \in V_0$, alors la multifonction $G_y$ est pseudo-contractive relativement à $U_0$, i.e.

$$G_y(x) \cap U_0 \subset G_y(x') + \theta \parallel x - x' \parallel \overline{B}_Y \quad \forall x, x' \in U_0$$

En effet, si $u \in G_y(x) \cap U_0$ alors d'une part :

$$u \in G_y(x) \Longleftrightarrow u \in A^{-1}(y - R(x)) \Longleftrightarrow y - A(u) \in R(x)$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \|y - A(u) - z_0\| &\leq \|y - y_0\| + \|A\|\|u - x_0\| \leq s + \|A\|\frac{r}{\|A\|} \\ &< \sigma - r + r = \sigma \end{aligned}$$

d'où :

$$y - A(u) \in R(x) \cap B(z_0, \sigma) \subset R(x') + \theta\|x - x'\|\overline{B}_Y$$

Il existe donc : $z' \in R(x')$ tel que :

$$\|y - A(u) - z'\| \leq \theta\|x - x'\|$$

Considérons $u' \in A^{-1}(y - z') \subset A^{-1}(y - R(x')) = G_y(x')$. D'après les propriétés de $A^{-1}$ est "linéaire" (additive et homogène (pour les $\lambda \neq 0$)) et comme $u \in A^{-1}(A(u)), u - u' \in A^{-1}(A(u) - y + z')$ d'où par l'hypothèse de bornétude de la multifonction inverse, il vient que :

$$\begin{aligned} d(u, G_y(x')) &\leq \|u - u'\| \\ &\leq \|A^{-1}\|\|A(u) - y + z'\| \\ &\leq \theta\|A^{-1}\|\|x - x'\| \leq k\|x - x'\| \end{aligned}$$

d'où la multifonction $G_y$ est pseudo-$k$-contractive relativement à $U_0$
D'autre part, comme $A^{-1}$ est additive, on'a :

$$\begin{aligned} G_y(x_0) &:= A^{-1}(y - R(x_0)) = A^{-1}(y_0 + y - y_0 - R(x_0)) \\ &= G_{y_0}(x_0) + A^{-1}(y - y_0) \end{aligned}$$

et sachant que $x_0 \in G_{y_0}(x_0), d(x_0, G_{y_0}(x_0)) = 0$, il vient alors que :

$$\begin{aligned} d(x_0, G_0(x_0)) &\leq d(0, A^{-1}(y - y_0)) = \inf_{x \in A^{-1}(y - y_0)} \|x\| \\ &\leq \|A^{-1}\|\|y - y_0\| < \|A^{-1}\|s \leq (1 - k)r. \end{aligned}$$

On est alors en mesure d'appliquer le théorème (3.3.1) qui assure que la multifonction $G_y$ admet un point fixe $x \in U_0 := B(x_0, \frac{r}{\|A\|})$. Ainsi pour tout $y$ fixé dans $V_0$ il existe $x \in U_0$ de sorte que :

$$\begin{aligned} x &\in G_y(x) \\ &\iff x \in A^{-1}(y - R(x)) \\ &\iff y \in R(x) + A(x) \\ &\iff y \in F(x) \end{aligned}$$

i.e. $V \in F(U)$. Ce qui prouve que $F$ est ouverte en $(x_0, y_0)$. □

**Corollaire 4.2.1** (1). *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent avec :* $A = DF(x_0, y_0) \in Isom(X, Y)$*, la multifonction inverse* $F^{-1}$ *est quasi-strictement difffé-rentiable en* $(y_0, x_0)$ *et sa dérivée est* $A^{-1}$.

**Preuve.** La multifonction $F$ étant quasi-strictement en $(x_0, y_0)$, alors pour tout : $\varepsilon \in (0, k)$, il existe $s_\varepsilon \in (0, s)$, tel que :

$$R(x) \cap B(z_0, s_\varepsilon) \subset R(x') + \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{1 + \|A^{-1}\|^2}\|x - x'\|\overline{B}_Y \quad \forall x, x' \in B(x_0, r_\varepsilon) \tag{4.2.3}$$

où $r_\varepsilon := \min(r, s_\varepsilon)$. Posons : $S(y) := F^{-1}(y) - A^{-1}(y), U_\varepsilon := B(A^{-1}(-z_0), \frac{r_\varepsilon}{4\|A\|})$, $V_\varepsilon := B(y_0, \frac{r_\varepsilon}{4(1+\|A^{-1}\|)})$ et prenons deux points $y, y' \in V_\varepsilon$. Il s'agit de montrer que :

$$S(y) \cap U_\varepsilon \subset S(y') + \varepsilon\|y - y'\|\overline{B}_X$$

i.e. pour tout $u \in S(y) \cap U_\varepsilon$, il existe $u' \in S(y')$ tel que :

$$\|u - u'\| \leq \varepsilon\|y - y'\|$$

Soit alors : $u \in S(y) \cap U_\varepsilon$, il existe $x \in F^{-1}(y)$ tel que : $u = x - A^{-1}(y)$ et on'a :

$$A(-u) \in R(x)$$

De plus, $A(-u) \in B(z_0, s_\varepsilon)$ car :

$$\begin{aligned}
\|A(-u) - z_0\| &= \|A(A^{-1}(-z_0) - u)\| \\
&\leq \|A\|\|A^{-1}(-z_0) - u\| \\
&\leq \frac{r_\varepsilon}{4} < s_\varepsilon
\end{aligned}$$

Posons maintenant, $w := x - A^{-1}(y - y') = u + A^{-1}(y')$, on vérifie aisément que : $w, x \in B(x_0, r_\varepsilon/2)$ avec $A(-u) \in R(x) \cap B(z_0, s_\varepsilon)$. Ainsi, d'après l'inclusion (4.2.3), il va exister $z \in R(w)$ tel que :

$$\|z - A(-u)\| \leq \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{1 + \|A^{-1}\|^2}\|w - x\|$$

D'autre part, pour la multifonction $G_{y'}(\cdot) = A^{-1}(y' - R(\cdot))$, on'a :

$$\begin{aligned}
d(w, G_{y'}(w)) &\leq \|w - A^{-1}(y' - z)\| = \|u + A^{-1}(y') - A^{-1}(y' - z)\| = \|A^{-1}(z - A(-u))\| \\
&\leq \varepsilon(1-\varepsilon)\frac{\|A^{-1}\|}{1 + \|A^{-1}\|^2}\|w - x\| \\
&\leq \varepsilon(1-\varepsilon)\|y' - y\| := t_\varepsilon \\
&\leq \varepsilon(1-\varepsilon)r_\varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Appliquons alors une seconde fois le théorème (3.3.1) à la multifonction $G_{y'}$ qui est, d'après (4.2.3), pseudo-$\varepsilon$-contractante relativement à $B(w, (1-\varepsilon)^{-1}t_\varepsilon) \subset B(w, r_\varepsilon/2)$, donc $G_{y'}$ admet au moins un point fixe. Ainsi il existe $x' \in B(w, (1-\varepsilon)^{-1}t_\varepsilon)$ tel que : $x' \in G_{y'}(x')$ ou encore $x' \in A^{-1}(y' - R(x'))$ et on'a alors :

$$u' := x' - A^{-1}(y') \in S(y')$$

car $x' \in F^{-1}(y')$. De plus :

$$\|u - u'\| = \|x - A^{-1}(y) - x' + A^{-1}(y')\| = \|w - x'\| \leq (1-\varepsilon)^{-1}t_\varepsilon = \varepsilon\|y' - y\|$$

D'où $F^{-1}$ est quasi-strict différentiable en $(y_0, x_0)$. □

**Remarque 4.2.1.** *D'autres résultats de différentiabilité de la multifonction inverse peuvent être données. Cependant, d'autres conditions supplémentaires (très fortes) doivent être supposées, comme par exemple, que* $F(x_0)$ *soit un singleton. On pourra se réferer à* [23] *pour plus de détails .*

## 4.3 Théorème de multifonction implicite

On s'intéresse à présent à la version multivoque du théorème de fonction implicite [21] dans le but de résoudre des inclusions de type

$$y \in F(x,p)$$

où $x$ est l'inconnu et $p$ est un paramètre variable. pour cela, on'a besoin d'introduire une notion de stricte différentiabilité partielle de la maniére suivante :

**Définition 4.3.1.** *Soient $X, Y, Z$ des e.v.n $\Omega$ un ouvert dans $X \times Z$. Une multifonction $F : \Omega \rightrightarrows Y$ est dite partiellement quasi-stricte différentiable en $((x_0, z_0), y_0) \in grF$ relativement à $X$ si :*

**1)** *La multifonction $z \mapsto F(x_0, z)$ est s.c.i en $(z_0, y_0)$.*

**2)** *il existe un opérateur linéaire continu $A : X \to Y$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $U_\varepsilon, V_\varepsilon, W_\varepsilon$ des voisinages de $x_0, y_0$ et $z_0$ respectivement tels que*

$$F(x,z) \cap V_\varepsilon \subset F(x',z) + A(x-x') + \varepsilon\|x-x'\|\overline{B}_Y \quad \forall x, x' \in U_\varepsilon, \forall z \in W_\varepsilon$$

*On note par $A := D_1F(x_0, z_0)$ la dérivée partielle de $F$ (par rapport à $x$) en $(x_0, z_0)$.*

**Remarque 4.3.1.** *Si $F : \Omega \rightrightarrows Y$ est partiellement quasi-stricte différentiable en $((x_0, z_0), y_0)$ alors $F$ est s.c.i en $((x_0, z_0), y_0)$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, d'après la condition (2) de la définition précédente, il existe $\alpha_\varepsilon > 0$ (resp. $\beta_\varepsilon, \delta_\varepsilon$) tels que :*

$$F(x_0,z) \cap B(y_0, \beta_\varepsilon) \subset F(x,z) + A(x_0 - x) + \varepsilon\|x - x_0\|\overline{B}_Y \quad \forall x \in B(x_0, \alpha_\varepsilon), \forall z \in B(z_0, \delta_\varepsilon)$$

*Et d'après 1) pour tout $z \in B(z_0, \delta_\varepsilon)$, il existe $y_1 \in F(x_0, z)$ de sorte que $d(y_0, y_1) < \beta'_\varepsilon := \min(\beta_\varepsilon, \varepsilon)$. D'où $y_1 \in F(x_0, z) \cap B(y_0, \beta_\varepsilon)$ et on'a :*

$$\begin{aligned} d(y_0, F(x,z)) &\leq d(y_0, y_1) + d(y_1, F(x,z)) \\ &\leq d(y_0, y_1) + e(F(x_0,z) \cap B(y_0, \beta_\varepsilon), F(x,z)) \\ &\leq \varepsilon + (\|A\| + \varepsilon)\|x - x_0\|. \end{aligned}$$

*Ainsi lorsque $(x,z) \to (x_0, z_0), d(y_0, F(x,z)) \to 0$ i.e. $F$ est s.c.i en $((x_0, z_0), y_0)$.*

**Théorème 4.3.1.** *Soient $X, Y$ deux espaces de Banach, $Z$ un espace topologique et $\Omega$ un ouvert dans $X \times Z$. Soit $F : \Omega \rightrightarrows Y$ une multifonction à valeurs fermées non vides. Supposons que $F$ est partiellement quasi-strictement différentiable en $((x_0, z_0), y_0) \in grF$ relativement à $X$ telle que $A = D_1F(x_0, z_0) \in Isom(X, Y)$.*

*Alors pour tout voisinage $U$ de $x_0$, il existe un voisinage $V$ de $y_0$, un voisinage $W$ de $z_0$ tel que*

$$V \times W \subset \Psi(U \times W)$$

*où $\Psi(x, z) := F(x, z) \times \{z\}$.*

*De plus, la multifonction $H : Y \times Z \rightrightarrows X$ telle que $\Psi^{-1}(y, z) = H(y, z) \times \{z\}$ est partiellement quasi-strictement différentiable en $((y_0, z_0), x_0)$ relativement à $Y$.*

**Preuve.** Même technique que dans la preuve de théorème d'inversion. □

Lorsque $F$ est univoque, on obtient le théorème classique de fonction implicites [21].

## 4.4 Application aux inclusions différentielles

Le but de cette section est de donner une application illustrative du théorème de multifonction implicite donné précédemment. Précisément, on va donner une application aux inclusions différentielles permettant d'établir le théorème d'existence de Filippov. Pour cela, considérons l'inclusion différentielle suivante :

$$(\mathcal{ID}) \begin{cases} \dot{x}(t) \in R(t, x(t)) \\ x(0) = \xi \end{cases}$$

avec $R : [0, T] \times E \twoheadrightarrow E$ une multifonction, $E$ un espace de Banach séparable, $\xi \in E$ et $T > 0$.

On appelera solution de l'inclusion différentielle $(\mathcal{ID})$ toute fonction continue $x(\cdot) : [0, T] \to E$ telle qu'il existe une fonction $u(\cdot) : [0, T] \to E$ intégrable (i.e. $u \in L_1(I, E)$) vérifiant $u(t) \in R(t, x(t))$ p.p. $t \in I := [0, T]$ et :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t u(s)ds \qquad \forall t \in I$$

i.e. $x \in X := W^{1,1}(I, E)$ et donc $x$ est différentiable presque partout sur $I$ et $\dot{x} = u$.

Où : $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathbb{L}^p(\Omega) \backslash \ \forall \alpha \qquad |\alpha| \leq m, \mathbb{D}^\alpha u \in \mathbb{L}^p(\Omega)\}$

$\alpha$ est un multi-indice, $D^\alpha u$ est une dérivée faible (au sens des distribution) et $\mathbb{L}^p$ désigne un espace de lebesgue.

Les hypothèses classiques d'existence de solutions de $(\mathcal{ID})$ sont comme suit : Etant donné $w_0 \in X, r > 0, k : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable, on suppose :

$(\mathcal{P}_1)$ Pour tout $(t, e) \in I \times B(w_0(t), r)$, le sous-ensemble $R(t, e)$ est fermé non vide.

$(\mathcal{P}_2)$ La multifonction $R(\cdot, e) : I \rightrightarrows E$ est mesurable pour tout $e \in B(w_0(t), r)$, à savoir, pour tout ouvert $U$ dans $E$, l'ensemble

$$\{t \in I : R(t, e) \cap U \neq \emptyset\}$$

est mesurable.

$(\mathcal{P}_3)$ La multifonction $R(t, \cdot)$ est $k(t)$-lipschitzienne sur $B(w_0(t), r)$ p.p. $t \in I$.

$(\mathcal{P}_4)$ La fonction $\rho(\cdot) := d(w_0(\cdot), R(\cdot, w_0(\cdot))) : I \to \mathbb{R}_+$ est intégrable.

Sous ces hypothèses, on'a le résultat classique suivant :

**Théorème 4.4.1.** *Sous $(\mathcal{P}_1), (\mathcal{P}_2), (\mathcal{P}_3)$ et $(\mathcal{P}_4)$, pour tout $\xi \in E$ assez proche de $w_0(0)$, l'inclusion différentielle $(\mathcal{ID})$ admet au moins une solution dans un certain intervalle $J \subset I$.*

**Preuve.** Considérons $X = Y = W^{1,1}(I, E)$ muni de la norme :

$$\|x\|_X = \|x(0)\|_E + \int_0^T \|\dot{x}(s)\|_E ds$$

$Z := [0, 1] \times E$ et $X_0 = \{x \in X : x(t) \in B(w_0(t), r) \forall t \in I\}$ et par soucis de simplification, on supposera que $w_0 = 0$ et donc $\dot{w}_0 = 0$.

Définissons maintenant la multifonction $F : X_0 \times Z \rightrightarrows X$ telle que pour tous $x \in X_0, z := (\theta, \xi) \in Z$

$$y \in F(x, z) \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists u \in L_1(I, E) \text{ tel que } u(t) \in R(\theta t, x(t)) \text{ p.p. } t \in I \\ y(t) = x(t) - \xi - \int_0^t \theta u(s) ds \end{cases}$$

Remarquons que pour $x_0 := w_0 = 0$ et $z_0 := (0, w_0(0))$ on'a $F(x_0, z_0) = \{y_0\}$ avec $y_0 := 0$
• Vérifions que $F$ est à valeurs non vides. Soit $(x, z) := (x, \theta, \xi) \in X_0 \times Z$, il existe alors $u \in L_1(I, E)$ telle que : $x(t) = x(0) + \int_0^t u(s)ds \qquad (\forall t \in I)$ et comme $x(\cdot)$ est continue et $R(\cdot, e)$ est mesurable, la multifonction $G : t \to G(t) := R(\theta t, x(t))$ est mesurable (voir [23, Thm 14.13 p. 654]). D'où, d'après [14, Thm 2 p. 91], il existe une fonction mesurable $v : I \to E$ vérifiant : $v(t) \in G(t) = R(\theta t, x(t))$ p.p sur $I$ avec :

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &= d(u(t), R(\theta t, x(t))\theta) \\ &\leq \|u(t)\| + d(0, R(\theta t, x(t))) \end{aligned}$$

Par les hypothèses $(\mathcal{P}_3), (\mathcal{P}_4)$ et les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|v(t)\| &\leq \|v(t) - u(t)\| + \|u(t)\| \\ &\leq 2\|u(t)\| + d(0, R(\theta t, 0)) + e(R(\theta t, 0), R(\theta t, x(t))) \\ &\leq 2\|u(t)\| + d(0, R(\theta t, 0)) + k(\theta t)\|x(t)\| \end{aligned}$$

on conclut que $v(\cdot)$ est intégrable.

Définissons maintenant la fonction $y : I \to E$ par :

$$y(t) = x(t) - \xi - \int_0^t \theta v(s)ds \qquad \forall t \in I$$

donc $y \in F(x, z)$ i.e. $F$ est à valeur non vides.
• Montrons maintenant que $F$ est à valeurs fermées. Considérons une suite $(y_n)$ dans $F(x, z)$ où : $(x, z) := (x, \theta, \xi) \in X_0 \times Z$ et de sorte que : $y_n \to y$ dans $X$. On'a, pour tout : $n, y_n(t) = x(t) - \xi - \int_0^t \theta u_n(s)ds$ avec : $u_n \in L_1(I, E)$ et $u_n(t) \in R(\theta t, x(t))$ p.p $t \in I$. Sans restraindre la généralité, on peut supposer que $\theta \neq \emptyset$ (sinon, la suite $(y_n)$ serait une suite constante). Comme $y \in X$, il existe $u \in L_1(I, E)$ telle que : $y(t) = y(0) + \int_0^t u(s)ds = y(0) + \int_0^t \theta v(s)ds \quad (t \in I)$ avec $v(\cdot) := \frac{u(\cdot)}{\theta}$. Or $y_n \to y$ dans $X$, donc :

$$y(0) = x(0) - \xi \quad et \quad \widetilde{u}_n \to v \quad dans \quad L_1(I, E)$$

avec : $\widetilde{u}_n := \frac{\dot{x}}{\theta} - u_n$. Par conséquent, on peut extraire une sous-suite $(u_{s(n)})$ vérifiant : $\overline{u}_{s(n)}(t) \to v(t)$ p.p. sur $I$ ainsi $u_{s(n)}(t) \to \frac{\dot{x}(t)}{\theta} - v(t)$. Par l'hypothèses $(p_1)$, $\frac{\dot{x}(t)}{\theta} - v(t) \in$

$R(\theta t, x(t))$ p.p. $t \in I$ et donc : il existe $w(t) \in R(\theta t, x(t))$ p.p. sur $I$ tel que $w(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\theta} - v(t)$ D'où $w(\cdot) \in L_1(I, E)$ et on'a :

$$\begin{aligned} y(t) &= x(0) - \xi + \int_0^t \theta(-w(s) + \frac{\dot{x}(t)}{\theta})ds \\ &= x(t) - \xi - \int_0^t \theta w(s)ds \end{aligned}$$

on conclut que $y \in F(x, z)$. Ainsi, $F$ est à valeur fermées.

• Pour la semi continuité inférieure de $F(x_0, \cdot)$ en $(z_0, y_0)$, on'a, pour $y \in F(x_0, z)$

$$\|y\|_X = \|\xi\|_E + \int_0^T \theta \|u(s)\|_E ds$$

où : $u \in L_1(I, E)$ tel que $u(t) \in R(\theta t, w_0(t))$ p.p. $t \in I (w_0 = x_0)$. Donc :

$$\begin{aligned} d(0, F(x_0, z)) &:= \inf\{\|y\|_X : y \in F(x_0, z)\} \\ &= \inf\left\{\|\xi\|_E + \int_0^T \theta\|u(s)\|_E ds : u(\cdot) \in R(\theta\cdot, w_0(\cdot))\right\} \\ &= \|\xi\|_E + \inf\left\{\int_0^T \theta\|u(s)\|_E ds : u(\cdot) \in R(\theta\cdot, w_0(\cdot))\right\} \end{aligned}$$

D'autre part, d'après un résultat dans [23, Thm 14.60 p. 677] :

$$\begin{aligned} \inf\left\{\int_0^T \theta\|u(s)\|_E ds : u(\cdot) \in R(\cdot, w_0(\cdot))\right\} &= \int_0^T \theta \inf\{\|u(s)\|_E ds : u(\cdot) \in R(\theta\cdot, w_0(\cdot))\} \\ &= \int_0^T \theta d(0, R(\theta s, w_0(s)))ds \end{aligned}$$

donc par l'hypothèse $(\mathcal{P}_4)$, il vient que :

$$d(0, F(x_0, z)) \leq \|\xi\| + \int_0^{\theta T} \rho(s)ds$$

On conclut que : $d(0, F(x_0, z)) \to 0$ quand $z \to z_0$.

Montrons maintenant que : $F$ est partiellement strictement différentiable en $((x_0, z_0), y_0)$ relativement à $X$ et $D_1F(x_0, z_0) = I$. Etant donné $\varepsilon > 0$, prenant $\xi \in E$ et $\theta \in [0, 1]$ tel que $m(\theta T) \leq \varepsilon$ où $m(t) := \int_0^t k(s)ds$. Il s'agit de montrer que pour : $z = (\theta, \xi)$ et $x_1, x_2 \in B(x_0, r)$, on'a :

$$e(F(x_1, z) - x_1, F(x_2, z) - x_2) \leq \varepsilon\|x_1 - x_2\|_X \tag{4.4.1}$$

Soient : $y_i \in F(x_i, z)(i = 1, 2)$ tels que : $y_i(t) = x_i(t) - \xi - \int_0^t \theta u_i(s)ds$ avec : $u_i(t) \in R(\theta t, x_i(t))$ p.p. $t \in I$, alors : comme $(y_1(0) - x_1(0)) - (y_2(0) - x_2(0)) = 0$ on'a :

$$d(y_1 - x_1, y_2 - x_2) \leq \int_0^T |\theta|\|u_1(s) - u_2(s)\|ds$$

Donc, en appliquant [23, Thm 14.60] et l'hypothèse $(\mathcal{P}_2)$, on obtient

$$\begin{aligned} d(y_1 - x_1, F(x_2, z) - x_2) &\leq \int_0^T \theta e(R(\theta s, x_1(s)), R(\theta s, x_2(s)))ds \\ &\leq \int_0^T \theta k(\theta s) \parallel x_1(s) - x_2(s) \parallel ds \leq m(\theta T)\|x_1 - x_2\|_\infty \\ &\leq \varepsilon\|x_1 - x_2\|_X \end{aligned}$$

Ainsi la multifonction $F$ satisfait les hypothèses du théorème (4.3.1) (avec ici une dérivée inversible) et donc il existe des voisinages $U, V, W$ de $x_0, 0$ er $z_0$ respectivement avec $U \times W \subset X_0 \times Z$ et pour une certaine fonction $h : V \times W \to U$, on'a $y \in F(h(y, z), z)$ pour tout $(y, z) \in V \times W$.

En particulier, pour tout $z \in W$, il existe $h(0, z)$ dans $U$ pour lequel $0 \in F(h(0, z), z)$. D'où il existe $u \in L_1(I, E)$ de sorte que :

$$\begin{aligned} u(t) &\in R(\theta t, h(0, z)(t)) \text{ p.p. } \quad t \in I, \\ h(0, z)(t) &= \xi + \int_0^t \theta u(s)ds. \end{aligned}$$

Posons : $W := [0, \theta] \times W_E$, avec $\theta > 0$ assez petit, et $W_E$ est un voisinage de 0 dans $E$. Alors pour $\xi \in W_E, z := (\theta, \xi), w(t) := h(0, z)(t/\theta), v(t) = u(t/\theta)$ où $t \in [0, \theta T]$, on'a

$v(\cdot) \in L_1([0, \theta T], E), v(t) \in R(t, w(t))$ p.p. $t \in [0, \theta T]$ et

$$w(t) = \xi + \int_0^t v(s)ds$$

Donc, pour $\tau := \theta T$, pour tout $\xi \in W_E$, l'inclusion différentielle $(\mathcal{ID})$ admet une solution sur $J := [0, \tau]$. $\square$

# Conclusion

Ce manuscrit résume, en quelques pages, les principaux outils et concepts de l'analyse multivoque.

Le travail est consacré essentiellement à la régularité des multifonctions et ses application. Plus précisement, l'étude est centrée sur la lipschiziannité, la différentiabilité ainsi que l'inversion des multifonctions , on'a été concerné par les théorèmes de points fixes et la géneralisation des contractions.

Des applications variées sont présentées. Particulièrement, des applications relatives aux points fixes, aux inclusions différentielles et aux problèmes d'optimisation.

# Bibliographie


[1] A.D.Ioffe and V.M. Tihomirov, theory of extremal problems, Studies in Mathematics and its application ♯6, North Holland, Amsterdam (1979).

[2] A. L. Dontchev, Implicit function theorems for generalized equations, Math. Program. **70** A, No. 1, 91-106 (1995).

[3] A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar, Implicit Function and Solution Mappings, Springer Mathematics Monographs, Springer, Dordrecht, (2010).

[4] B.E. Rhoades, A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 226 (1977), 257-290.

[5] B. Levy and R.T. Rockafellar, Variational conditions and the protodifferentiation of partial subgradient mappings, Nonlinear Analysis, Theory. Methods et Applications, **26**,$N°$12 (1996), 1951-1964.

[6] B.S. Mordukhovich and Y. Shao, Fuzzy calculus coderivatives of multifunctions. Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.**29**, 605-626 (1997).

[7] B.S. Mordukhovich and Y. Shao, Mixed cderivatives of set-valued mappings in variational analysis, J. Appl. Anal.4, 269-294 (1989).

[8] B.S. Mordukhovich and Y. Shao, Nonconvex coderivative calculus for infinite dimensional multifunctions,. Set-Valued Anal.4, 205-236 (1996).

[9] B.S. Mordukhovich, Variational Analysis and Generalized Differentiation, Vol. I : Basic Theory, Vol. II : Applications, Springer, Berlin, (2006).

[10] Caroline Dazé, Théorèmes de Point Fixe et Principe variationnel d'Ekeland, février 2010.

[11] D. Azé. and C.C. Chou, On a Newton type iterative method for solving inclusion. Math. Oper. Res. **20** (1995), $N°$. 4, 790-800.

[12] D. Azé. and J.-P. Ponot, On the dependence of fixed point sets of pseudo-contractive multifunctions. Applications to differential inclusions, Nonlinear Dynamics and systems Theory, **6(1)**. (2006), 31-47.

[13] D.B. Silin, On set-valued differentiation and integration, Set-Valued Anal. **5**, No. 2, 107-146 (1997).

[14] J.-P. Aubin and A. Cellina, Differential inclusion, Set-valued map and Viability theory, Springer-Verlag (1984).

[15] J.-P. Aubin and H. Frankowska, On inverse function theorems for set-valued maps, J. Maths. Pures Appl. 66 (1987), 71-89.

[16] H.T. Banks and Q.M. Jacobs, A differential calculus for multifunction, J. Math. Anal. Appl. 29, 246-272 (1970).

[17] K. Nachi and J. -P. Penot, Inversion of multifunctions and differential inclusions, Control Cybernet. 34 (3) (2005) 871-901.

[18] Meddah. Meriem . Régularité des multifonctions et applications, 25 juin 2012

[19] P. H. Dien and N.D. Yen, On implicit function theorems for set valued maps end their application to mathematical programing under inclusion constraints, Applied Math. Optim. 24 (1991), 35-54.

[20] P.H. Sach, Differentiability of set-valued maps in Banach spaces, Math. Nachr. 139 (1988), 215-235.

[21] P.Lissy ,Inversion locale , fonctions implicites.Exemples et applications March **3**,2010.

[22] R. S. Burachik and A. N. Iusem, Set-valued mapping and enlargements of monotone operators. Springer Optimization and its applications. V. **8**, (2008).

[23] R.T. Rockafellar and R. JB. Wets, Variational analysis, Springer, New York (2000).

[24] S. B. Nadler, Multivalued contration mappings, Pacific J. Maths., **30** (1969), 475-488.

[25] S. Benahmed, On diferential inclusions with unbounded right-hand side, Serdica Math. J. **37**, (2011), 1-8 .

[26] Sfya. Benahmed, Sur les Méthodes ariationnelles en Analyse Multivoque, ENSET D'Oran, BP **1523** El Ménaouer, **31000** Oran, Algérie

[27] S. Djebali et A. Ouahab, Analyse Multivoque et Inclusions Diférentielles, B.P. **92, 16050** Kouba. Alger, Algérie, B.P. 89, 22000 Sidi-Bel-Abbes, Algérie.

[28] S. Gautier, Contributions à l'analyse non-lineire : inclusion différentielles, différetiabilité des multiapplications, Thèse d'Etat, Univ. of Pau (1989).

[29] S. Li, J.-P. Penot and X.Xue, Codifferntial calculus, Set-Valued Analysis (2011) 19, 505-536.

[30] T.C. Lim, on fixed point stability for set-valued contractive mappings with applications to generalized differnetial equations, J. Math. Anal. Appl. 110, 436-441(1985).